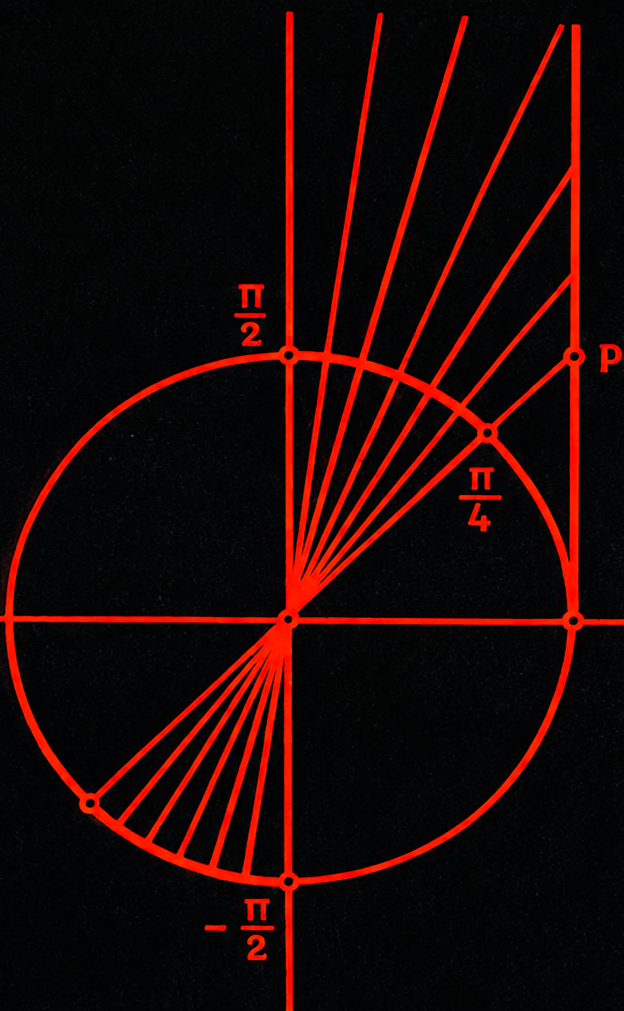
И. И. СМИРНОВ

СБОРНИК ВОПРОСОВ и ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ



УЧПЕДГИЗ
1962

И. И. СМИРНОВ

СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА — 1962

Иван Иванович Смирнов

Сборник вопросов и задач по тригонометрии

Редактор *С. В. Пазельский*

Художник *В. Т. Сидоренко*

Художественный редактор *Б. Л. Николаев*

Технический редактор *В. И. Корнеева* Корректор *Т. Н. Смирнова*

Сдано в набор 4/VII 1961 г. Подписано к печати 10/XI 1961 г.
$84 \times 108^1/_{32}$. Печ. л. 12 (9,80) Уч.-изд. л. 9.40
Тираж 77 тыс. экз. Заказ 2650.

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Полиграфкомбинат Саратовского совнархоза
г. Саратов. ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 25 коп., переплет 8 коп.
Отпечатано с готовых матриц в Смоленской областной типографии
имени Смирнова. Заказ № 4186.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава 1. **Тригонометрические функции острого угла**

§ 1. Изменение тригонометрических функций с изменением угла от 0 до 90°. 5
§ 2. Зависимость между тригонометрическими функциями дополнительных углов. 8
§ 3. Натуральные значения тригонометрических функций . . 9
§ 4. Решение прямоугольных треугольников 11

Глава II. **Углы и дуги произвольной величины**

§ 1. Обобщение понятия угла. Измерение углов 22
§ 2. Построение углов и дуг произвольной величины 28

Глава III. **Тригонометрические функции**

§ 1. Тригонометрические функции произвольного угла . . . 34
§ 2. Знак тригонометрических функций 36
§ 3. Значения тригонометрических функций от углов:
$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$. 38
§ 4. Основные тригонометрические тождества 40
§ 5. Построение угла по данному значению его тригонометрической функции 45
§ 6. Дополнительный к главе III 52

Глава IV. **Теоремы сложения и их следствия**

§ 1. Теоремы сложения 57
§ 2. Формулы приведения 66
§ 3. Формулы удвоения аргумента 70

§ 4. Формулы деления аргумента 75
§ 5. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму 77
§ 6. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение 78
§ 7. Дополнительный к главе IV 81

Глава V. Основные свойства тригонометрических функций

§ 1. Тригонометрические функции числового аргумента и их области определения 86
§ 2. Периодичность тригонометрических функций 90
§ 3. Промежутки знакопостоянства и промежутки монотонности тригонометрических функций 92
§ 4. Графики тригонометрических функций 94
§ 5. Дополнительный к главе V 99

Глава VI. Вычисление тригонометрических выражений 102

Глава VII. Решение косоугольных треугольников 107

Глава VIII. Задачи на повторение 111

Глава IX. **Задачи по стереометрии с применением тригонометрии**

§ 1. Прямые и плоскости 119
§ 2. Многогранники 123
§ 3. Круглые тела 132
§ 4. Дополнительный к главе IX 142

ОТВЕТЫ 149

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий «Сборник» составлен в плане учебника по тригонометрии С. И. Новоселова: главы II—VII по порядку соответствуют главам I—VI учебника.

В главе I «Сборника» даны задачи по материалу программы VIII класса и дополнительные для углубленного повторения той же темы в IX классе как основы, позволяющей излагать теорию гониометрии в связи с ее широким применением к решению задач по физике, технике и другими приложениями.

«Сборник» составлен на основе опыта преподавания тригонометрии в 188-й средней школе г. Москвы с использованием как периодической (журнал «Математика в школе»), так и эпизодической литературы по вопросам теории и методики тригонометрии.

Во второе издание книги внесены незначительные редакционные изменения, исправлены замеченные опечатки и для удобства пользования книгой введена сквозная нумерация упражнений.

Автор

Глава I

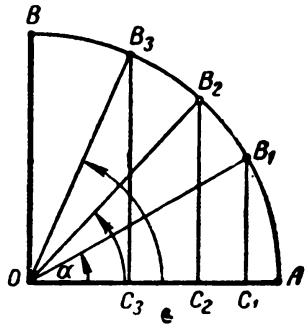
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

§ 1. Изменение тригонометрических функций с изменением угла от 0 до 90°

1. OA — радиус дуги AB_1B; B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 — перпендикуляры к OA (черт. 1).

а) Значения какой тригонометрической функции углов B_1OA, B_2OA, B_3OA выражают отношения:

1) $\frac{B_1C_1}{OB_1}$; 2) $\frac{B_2C_2}{OB_2}$; 3) $\frac{B_3C_3}{OB_3}$?



Черт. 1.

б) Сравнив отношения $\frac{B_1C_1}{OB_1}$, $\frac{B_2C_2}{OB_2}$ и $\frac{B_3C_3}{OB_3}$, установить, как изменяется значение синуса угла с увеличением угла и с уменьшением угла.

в) Какое наибольшее и какое наименьшее значение имеет функция $\sin\alpha$ и при каком значении аргумента α?

2. а) Значения какой тригонометрической функции углов B_1OA, B_2OA, B_3OA выражают отношения (черт. 1):

$$\frac{OC_1}{OB_1}; \qquad \frac{OC_2}{OB_2}; \qquad \frac{OC_3}{OB_3}?$$

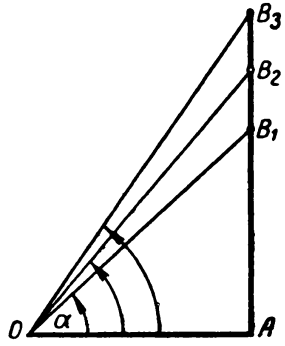
б) Как изменяется значение косинуса угла с увеличением угла и с уменьшением угла?

в) Какое наибольшее и какое наименьшее значение имеет функция $\cos\alpha$ и при каком значении аргумента α?

3. $B_3A \perp OA$ (черт. 2).

а) Значения какой тригонометрической функции углов B_1OA, B_2OA, B_3OA выражают отношения:

$$\frac{B_1A}{OA}; \qquad \frac{B_2A}{OA}; \qquad \frac{B_3A}{OA}?$$



Черт. 2.

б) Как изменяется значение тангенса угла с увеличением угла и с уменьшением угла?

в) Какое наименьшее значение имеет функция $\operatorname{tg}\alpha$ и при каком значении аргумента?

г) Имеет ли функция $\operatorname{tg}\alpha$ наибольшее значение? При каком значении аргумента α функция $\operatorname{tg}\alpha$ не имеет числового значения?

4. а) Значение какой тригонометрической функции углов B_1OA, B_2OA, B_3OA выражают отношения (черт. 2):

$$1)\ \frac{OA}{B_1A}; \qquad 2)\ \frac{OA}{B_2A}; \qquad 3)\ \frac{OA}{B_3A}?$$

б) Как изменяется значение котангенса угла с увеличением угла и с уменьшением угла?

в) Какое наименьшее значение имеет функция $\operatorname{ctg}\alpha$ и при каком значении аргумента?

г) Имеет ли функция $\operatorname{ctg}\alpha$ наибольшее значение? При каком значении аргумента α функция $\operatorname{ctg}\alpha$ не имеет числового значения?

5. (Устно.)

Что больше и почему:

1) $\sin 35°$ или $\sin 41°$;
2) $\cos 72°$ или $\cos 13°$;
3) $\operatorname{tg} 62°$ или $\operatorname{tg} 37°$;
4) $\operatorname{ctg} 17°$ или $\operatorname{ctg} 54°$;
5) $\cos 26°\,17'$ или $\cos 26°\,18'$;
6) $\operatorname{ctg} 51°\,13'$ или $\operatorname{ctg} 51°\,12'$;
7) $\sin 42°$ или $\frac{1}{2}$;
8) $\operatorname{tg} 17°$ или 1;
9) $\operatorname{ctg} 37°$ или 1;
10) $\operatorname{tg} 71°$ или 1;
11) $\sin 6°$ или 0,5;
12) $\operatorname{ctg} 84°$ или 1.

6. (Устно.)

Какой знак имеет разность и почему:

1) $\operatorname{tg} 67°\,47' - \operatorname{tg} 67°\,48'$;
2) $\sin 51°\,49' - \sin 51°\,48'$;

3) $\operatorname{ctg} 63° 15' - \operatorname{ctg} 50° 20'$; 4) $\cos 70° 41' - \cos 12° 11'$;
5) $\operatorname{tg} 34° 53' - \operatorname{tg} 71° 18'$; 6) $\sin 13° 45' - \sin 82° 17'$.

7. (Устно.)

При каком значении α следующие функции имеют наибольшее значение и при каком наименьшее*:

1) $\sin(27° - \alpha)$; 2) $\sin(\alpha - 27°)$; 3) $\sin(\alpha + 27°)$;
4) $\sin(42° - 2\alpha)$; 5) $\cos(\alpha - 39°)$; 6) $\cos(71° - \alpha)$;
7) $\cos(\alpha + 13°)$; 8) $\cos(2\alpha + 56°)$; 9) $\operatorname{tg}(35° - \alpha)$;
10) $\operatorname{tg}(45° - 3\alpha)$; 11) $\operatorname{ctg}(\alpha + 53°)$; 12) $\sin(3\alpha + 57°)$;
13) $\cos(90° - \alpha)$; 14) $\operatorname{ctg}(20° + 2\alpha)$; 15) $\operatorname{tg}(40° - 2\alpha)$;
16) $\cos(3\alpha - 72°)$.

8. (Устно.)

При каком значении α следующие функции имеют наименьшее значение и при каком — не имеют смысла:

1) $\operatorname{tg}(\alpha + 20°)$; 2) $\operatorname{ctg}(53° - \alpha)$; 3) $\operatorname{tg}(15° + 5\alpha)$;
4) $\operatorname{ctg}(\alpha - 53°)$; 5) $\operatorname{tg}(2\alpha - 40°)$; 6) $\operatorname{ctg}(54° - 3\alpha)$;
7) $\operatorname{ctg}(2\alpha - 74°)$; 8) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + 65\right)$.

9. При каких значениях α справедливы неравенства:

1) $\sin \alpha > \sin 27°$; 2) $\sin(\alpha - 15°) > \sin 31°$;
3) $\sin \alpha < \sin 78°$; 4) $\cos \alpha > \cos 35°$;
5) $\cos 2\alpha < \cos 12°$; 6) $\cos(23° - \alpha) > \cos 17°$;
7) $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg}(20° - \alpha)$; 8) $\operatorname{tg}(3\alpha - 15°) > \operatorname{tg}(\alpha + 45°)$;
9) $\operatorname{ctg}(\alpha + 3°) > \operatorname{ctg} 24°$; 10) $\sin 46° > \sin(2\alpha - 12°)$;
11) $\cos(3\alpha - 12°) > \cos 24°$; 12) $\operatorname{ctg}(2\alpha - 18°) < \operatorname{ctg} 54°$;
13) $\operatorname{tg}(2\alpha + 40°) < \operatorname{tg} 50°$; 14) $\sin(\alpha + 23°) > \sin(61° - \alpha)$;
15) $\cos 29° > \cos(63° - \alpha)$.

10. Записать неравенством (и показать на числовой оси) множество значений a, удовлетворяющих равенству:

1) $\sin\alpha = a$; 2) $\cos\alpha = a + 1$; 3) $\operatorname{tg}(45° - 3\alpha) = a + 1$;
4) $\sin\alpha = a - 1$; 5) $\cos\alpha = 1 - a$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{a - 3}$;
7) $\sin^2\alpha = a$; 8) $\cos(60° - \alpha) = a$; 9) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{1 + a}$.

11. (Устно.)

При каких значениях α верны следующие соотношения при условии, что $a > 0$ и $c > 0$:

---

*) Как в примерах этого параграфа, так и в примерах § 2 этой главы угловые параметры (α, β . . .), а также содержащая параметр сумма или разность углов рассматриваются в границах от 0 до 90°.

1) $c \cdot \sin\alpha < c$; 2) $\frac{a}{\cos\alpha} > a$; 3) $c \cdot \operatorname{tg}\alpha > c$;

4) $\frac{a}{\operatorname{ctg}\alpha} < a$; 5) $a \cdot \operatorname{ctg}\alpha < a$; 6) $\frac{c}{\operatorname{tg}\alpha} > c$.

12. Чему равно наибольшее значение (если оно существует) и чему равно наименьшее значение каждой из следующих функций и при каких значениях аргумента x:

1) $y = 2 + \sin x$; 2) $y = 5 - \cos x$; 3) $y = 4 + \operatorname{tg} x$;
4) $y = \operatorname{ctg} x - 1$; 5) $y = a + \sin x$; 6) $y = b + \operatorname{ctg} x$;
7) $y = c - \cos x$; 8) $y = \operatorname{tg} x + a$.

§ 2. Зависимость между тригонометрическими функциями дополнительных углов

13. Какие два угла называются дополнительными?

14. (Устно.)

Найти другой дополнительный угол, если один из них равен:

1) 40°; 2) 13°17′; 3) 56°04′;
4) 25°49′; 5) 73°51′; 6) α;
7) $90° - \alpha$; 8) $63° - \alpha$; 9) $57° + \alpha$.

15. Какие два угла в прямоугольном треугольнике являются дополнительными?

16. A и B — острые углы прямоугольного треугольника, a и b — соответственно противолежащие им катеты, c — гипотенуза. Доказать:

1) $\sin A = \cos B$; 2) $\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B$.

17. (Устно.)

Заменить функциями дополнительных углов:

1) $\sin 38°24'$; 2) $\cos 71°09'$; 3) $\operatorname{tg} 47°53'$;
4) $\operatorname{ctg} 11°04'$; 5) $\cos(45° + \alpha)$; 6) $\operatorname{tg}(\alpha + 18°)$;
7) $\sin(90° - \alpha)$; 8) $\operatorname{ctg}(51° - 2\alpha)$.

18. Найти (без таблиц) $\cos 60°$.

19. При каких значениях угла α справедливы следующие равенства:

1) $\sin(\alpha + 15°) = \cos(65° + \alpha)$; 2) $\cos(\alpha - 12°) = \sin(\alpha + 32°)$;
3) $\operatorname{tg}(2\alpha - 36°) = \operatorname{ctg}(\alpha + 12°)$; 4) $\operatorname{ctg}(\alpha + 15°) = \operatorname{tg}(75° - \alpha)$.

20. (Устно.) Что больше:

1) $\sin 53°$ или $\cos 61°$;
2) $\operatorname{tg} 13°$ или $\operatorname{ctg} 21°$;
3) $\cos 19°$ или $\sin 41°$;
4) $\operatorname{ctg} 37°$ или $\operatorname{tg} 84°$;
5) $\sin 70°$ или $\cos 40°$;
6) $\operatorname{tg} 45°$ или $\operatorname{ctg} 45°$.

21. При каких значениях α справедливы неравенства:

1) $\cos(\alpha - 12°) > \sin(64° + \alpha)$;
2) $\operatorname{tg}(65° - 2\alpha) > \operatorname{ctg}(40° - \alpha)$;
3) $\sin(\alpha + 36°) \geqslant \cos(72° - 2\alpha)$.

§ 3. Натуральные значения тригонометрических функций

22. На миллиметровой бумаге при помощи транспортира построить прямоугольный треугольник ABC с острым углом A, равным $35°20'$. Измерив с точностью до 0,1 *мм* катеты a и b и гипотенузу c, вычислить тригонометрические функции угла A. Заполнить таблицу:

A	$\sin A$	$\cos A$	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{ctg} A$
$35°20'$				

Указание. При вычислениях пользоваться правилами приближенных вычислений.

Найти по таблицам значения тригонометрических функций (23—26).

23. 1) $\sin 16°$; 2) $\sin 25°48'$; 3) $\sin 54°44'$;
4) $\sin 7°10'$; 5) $\sin 61°50'$; 6) $\sin 4°34'$;
7) $\sin 73°21'$; 8) $\sin 18°41'$.

24. 1) $\cos 88°$; 2) $\cos 24°42'$; 3) $\cos 56°20'$;
4) $\cos 11°10'$; 5) $\cos 74°38'$; 6) $\cos 41°40'$;
7) $\cos 88°27'$; 8) $\cos 56°29'$.

25. 1) $\operatorname{tg} 4°$; 2) $\operatorname{tg} 63°18'$; 3) $\operatorname{tg} 78°28'$;
4) $\operatorname{tg} 41°20'$; 5) $\operatorname{tg} 75°35'$; 6) $\operatorname{tg} 4°43'$;
7) $\operatorname{tg} 64°41'$; 8) $\operatorname{tg} 73°33'$.

26. 1) ctg 28°; 2) ctg 85°12′; 3) ctg 27°20′;
4) ctg 15°28′; 5) ctg 70°10′; 6) ctg 43°53′;
7) ctg 14°26′; 8) ctg 74°19′.

27. Заполнить таблицу:

α	0°35′	2°15′	4°51′	5°40′	5°50′
$\sin\alpha$					
$\operatorname{tg}\alpha$					

Подсчитать число нулей до первой значащей цифры в значениях синуса и тангенса углов, не превышающих 5°40′.

Найти при помощи логарифмической линейки (28—30).

28. 1) sin 3°16′; 2) tg 1°53′; 3) sin 4°27′;
4) tg 5°32′; 5) sin 27°; 6) sin 72°30′;
7) sin 26°40′; 8) sin 54°27′; 9) tg 34°;
10) tg 18°10′; 11) tg 42°40′; 12) tg 14°51′;
13) tg 78°; 14) tg 53°20′; 15) tg 87°46′;
16) tg 48°12′.

29. 1) cos 44°; 2) cos 76°20′; 3) cos 86°12′;
4) cos 36°17′; 5) ctg 78°; 6) ctg 4°40′;
7) ctg 53°37′; 8) ctg 24°51′; 9) cos 26°36′;
10) ctg 63°17′; 11) ctg 2°17′; 12) cos 87°43′;
13) cos 20°13′; 14) ctg 14°18′; 15) cos 41°26′;
16) ctg 48°21′.

30. 1) sin 35°20′; 2) cos 35°20′; 3) tg 35°20′;
4) ctg 35°20′.

Сопоставить полученные в задаче 30 значения функций с вычисленными значениями тех же функций в задаче 22.

Пользуясь таблицами, найти острый угол по значению его тригонометрической функции (31—35):

31. 1) $\sin x = 0{,}5934$; 2) $\sin y = 0{,}0593$; 3) $\sin z = 0{,}9990$;
4) $\sin\alpha = 0{,}7800$; 5) $\sin\beta = 0{,}5811$; 6) $\sin\gamma = 0{,}0295$;
7) $\sin\varphi = 0{,}1880$; 8) $\sin u = 0{,}9509$.

32. 1) $\cos\alpha = 0{,}3420$; 2) $\cos\beta = 0{,}9520$; 3) $\cos\gamma = 0{,}5783$;
4) $\cos\varphi = 0{,}0835$; 5) $\cos u = 0{,}8293$; 6) $\cos x = 0{,}3085$;
7) $\cos y = 0{,}5968$; 8) $\cos z = 0{,}0703$.

33. 1) $\operatorname{tg}\varphi = 1{,}3870$; 2) $\operatorname{tg} u = 0{,}3149$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 3{,}930$;
4) $\operatorname{tg}\beta = 0{,}0327$; 5) $\operatorname{tg}\gamma = 3{,}393$; 6) $\operatorname{tg} x = 2{,}601$;
7) $\operatorname{tg} y = 0{,}2870$; 8) $\operatorname{tg} z = 0{,}8845$.

34. 1) $\operatorname{ctg} x = 0{,}0577$; 2) $\operatorname{ctg} y = 1{,}5690$; 3) $\operatorname{ctg} z = 0{,}0318$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = 3{,}382$; 5) $\operatorname{ctg}\beta = 0{,}7419$; 6) $\operatorname{ctg}\gamma = 0{,}5536$;
7) $\operatorname{ctg}\varphi = 11{,}33$; 8) $\operatorname{ctg} u = 0{,}1010$.

35. 1) $\sin x = \frac{3}{7}$; 2) $\cos x = \sqrt{7} - 2$;

3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{1{,}073}$; 4) $\operatorname{ctg} x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$;

5) $\operatorname{tg}(2\alpha - 37^\circ) = 1{,}804$; 6) $\cos(28^\circ - x) = 0{,}9336$;

7) $\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}6293$; 8) $\operatorname{ctg}(2\alpha + 15^\circ) = 0{,}7547$.

Найти острый угол при помощи логарифмической линейки (36; 37).

36. 1) $\sin x = 0{,}249$; 2) $\operatorname{tg} z = 2{,}43$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}316$;
4) $\sin\varphi = 0{,}0282$; 5) $\sin\beta = 0{,}308$; 6) $\operatorname{tg} u = 31{,}4$;
7) $\operatorname{tg} y = 1{,}76$; 8) $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}588$; 9) $\operatorname{tg} x = 0{,}0312$;
10) $\sin\alpha = 0{,}617$; 11) $\operatorname{tg} z = 4{,}83$; 12) $\sin\beta = 0{,}387$;
13) $\operatorname{tg}\varphi = 21{,}87$; 14) $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}0206$; 15) $\operatorname{tg} y = 9{,}24$;
16) $\sin\alpha = 0{,}0873$.

37. 1) $\cos\alpha = 0{,}643$; 2) $\operatorname{ctg}\beta = 0{,}562$; 3) $\operatorname{ctg} x = 3{,}86$;
4) $\operatorname{ctg}\gamma = 18{,}7$; 5) $\operatorname{ctg} u = 0{,}0724$; 6) $\cos z = 0{,}0536$;
7) $\cos\varphi = 0{,}847$; 8) $\operatorname{ctg}\varphi = 0{,}486$; 9) $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}0327$;
10) $\operatorname{ctg}\gamma = 1{,}63$; 11) $\cos z = 0{,}0649$; 12) $\operatorname{ctg}\beta = 0{,}833$;
13) $\operatorname{ctg}\gamma = 14{,}62$; 14) $\operatorname{ctg} x = 3{,}97$; 15) $\operatorname{ctg}\alpha = 57{,}5$;
16) $\cos u = 0{,}903$.

§ 4. Решение прямоугольных треугольников

Обозначения. В прямоугольном треугольнике ABC обозначают: C — прямой угол, A и B — острые углы, a — катет, лежащий против угла A, b — катет, лежащий против угла B, c — гипотенуза.

38. Исходя из определения тригонометрических функций, вывести следующие соотношения и сформулировать их:

$$1)\ a = c \cdot \sin A = c \cdot \cos B;$$

$$2)\ c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B};$$

$$3)\ a = b \cdot \operatorname{tg} A = b \cdot \operatorname{ctg} B.$$

39. Решить прямоугольный треугольник (т. е. найти неизвестные стороны и углы), если известна гипотенуза c и острый угол A.

40. Решить прямоугольный треугольник при помощи таблиц по следующим данным:

1) $c = 20$, $A = 37°$;
2) $c = 12{,}5$, $B = 51°$;
3) $c = 0{,}6432$, $A = 47°22'$;
4) $c \approx 10$, $B = 40°$;
5) $c \approx 7$, $B = 57°$;
6) $c \approx 0{,}73$, $A = 25°$;
7) $c \approx 0{,}863$, $B = 12°54'$;
8) $c \approx 4{,}16$, $A = 56°20'$;
9) $c = 734{,}2$, $A = 26°42'$.

41. Решить прямоугольный треугольник при помощи логарифмической линейки по следующим данным:

1) $c = 37$, $B = 55°$;
2) $c = 0{,}316$, $A = 28°$;
3) $c = 8$, $B = 72°$;
4) $c \approx 5{,}4$, $A = 26°$;
5) $c \approx 0{,}9$, $B = 41°$;
6) $c = 24{,}7$, $A = 18°20'$;
7) $c = 3{,}84$, $B = 43°18'$;
8) $c \approx 35$, $B = 11°30'$;
9) $c = 0{,}236$, $A = 34°45'$.

Указание. При решении примеров № 40, 41, 49 и 50 выполнить контрольную проверку по теореме Пифагора.

42. Диагональ d прямоугольника образует с его большей стороной угол β. Определить стороны прямоугольника.

43. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна b, угол при основании треугольника равен α. Найти основание и высоту треугольника.

44. Сторона ромба равна a, его острый угол равен α. Определить диагонали ромба.

45. Стороны параллелограмма равны a и b, его острый угол равен α. Найти обе высоты параллелограмма.

46. В круге радиуса R проведена хорда, стягивающая дугу α. Найти длину хорды и ее расстояние от центра круга.

47. По радиусу R определить сторону и апофему правильного n-угольника. Вычислить сторону и апофему при $n = 10$ и $R = 8{,}4$ (при помощи таблиц).

48. Решить прямоугольный треугольник, если известны катет a и угол B.

49. Решить прямоугольный треугольник при помощи таблиц по следующим данным:

1) $a = 3{,}7$, $A = 15°$; 2) $b = 44{,}1$, $B = 58°$;
3) $a = 0{,}387$, $B = 38°$; 4) $b = 7{,}13$, $A = 16°43'$;
5) $a \approx 0{,}73$, $A = 61°$; 6) $b \approx 19$, $B = 21°$;
7) $a \approx 4{,}16$, $B = 43°24'$; 8) $a \approx 24{,}1$, $B = 53°46'$;
9) $b \approx 0{,}614$, $A = 28°32'$.

50. Решить прямоугольный треугольник при помощи логарифмической линейки по следующим данным:

1) $b = 4{,}3$, $A = 41°$; 2) $a = 8$, $B = 25°$;
3) $a = 0{,}821$, $A = 42°15'$; 4) $a \approx 71$, $B = 34°$;
5) $b \approx 0{,}41$, $A = 43°$; 6) $a = 6{,}44$, $B = 27°28'$;
7) $b \approx 0{,}53$, $A = 17°20'$; 8) $a = 68{,}3$ $A = 32°45'$;
9) $b \approx 41$, $B = 62°20'$.

51. Высота равнобедренного треугольника равна h, угол при основании равен α. Определить стороны треугольника.

52. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен β. Найти высоту и боковую сторону треугольника.

53. Меньшая диагональ ромба равна m, а острый угол равен α. Найти сторону и большую диагональ ромба.

54. Основания равнобочной трапеции равны a и b ($a > b$), а острый угол равен β. Определить высоту и боковую сторону трапеции.

55. Из точки A, лежащей вне круга, этот круг виден под углом α. Определить расстояние от точки до центра круга, если радиус последнего равен R.

56. Сторона правильного n-угольника равна a. Найти радиус многоугольника. Вычислить радиус при $a = 4{,}60$ и $n = 15$.

57. Меньшая сторона прямоугольника равна a и образует с диагональю угол α. Определить большую сторону и диагональ прямоугольника.

58. Решить прямоугольный треугольник при помощи таблиц по следующим данным:

1) $a=12$, $c=23$; 2) $b = 8{,}5$, $c=14{,}6$; 3) $b=46$, $c=59$.

59. Решить прямоугольный треугольник при помощи логарифмической линейки по следующим данным:

1) $b=11$, $c=18$; 2) $a=0{,}42$, $c=0{,}8$; 3) $a=53$, $c=81$.

60. Определить углы равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 3,7 *дм*, а основание — 8,4 *дм*.

61. Меньшая сторона параллелограмма равна 24,7 *м*, а меньшая высота равна 8,4 *м*. Определить углы параллелограмма.

62. Радиус одной окружности равен 13 *см*, а радиус другой окружности — 8 *см*; линия центров этих окружностей равна 30 *см*. Определить угол между общей внешней касательной данных окружностей и их линией центров.

63. Радиус одной окружности равен 18 *дм*, а радиус другой окружности — 12 *дм*; линия центров этих окружностей равна 5,4 *м*. Определить угол между линией центров данных окружностей и их общей внутренней касательной.

64. Решить прямоугольный треугольник при помощи таблиц по следующим данным:

1) $a=38$, $b=45$; 2) $a=0{,}54$, $b=0{,}385$; 3) $a=237$, $b=311$.

65. Решить прямоугольный треугольник при помощи логарифмической линейки по следующим данным:

1) $a=17$, $b=23$; 2) $a=0{,}9$, $b=1{,}4$; 3) $a=0{,}83$, $b=0{,}67$.

66. Стороны прямоугольника равны 13,8 *см* и 15,4 *см*. Найти углы между диагональю и сторонами прямоугольника.

67. Диагонали ромба соответственно равны 23,6 *см* и 35,2 *см*. Найти углы ромба и его сторону.

68. Диагональ прямоугольника равна d, угол между диагоналями равен α. Определить стороны прямоугольника.

Указание. Использовав свойство внешнего угла треугольника, свести к решению задачи 42.

69. Диагональ d прямоугольной трапеции перпендикулярна к ее боковой стороне, которая с основанием трапеции образует острый угол α. Определить стороны трапеции.

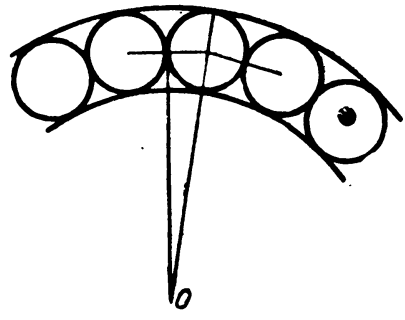
70. Около равнобедренного треугольника описана окружность и в него же вписана окружность. Определить радиусы окружностей, зная, что угол при вершине треугольника равен β, а боковая сторона равна c.

71. Две хорды, проведенные из одной и той же точки окружности, соответственно равны 8 *см* и 24 *см*, радиус

окружности равен 20 *см*. Определить угол между хордами (два случая)*.

72. По окружности требуется наметить центры отверстий для 12 болтов так, чтобы расстояние по хорде между центрами соседних отверстий равнялось 40 *мм*. Какого размера должен быть диаметр окружности?

73. Двадцать стальных шариков диаметром по 15 *мм* находятся в шариковом подшипнике, плотно прилегая друг к другу (черт. 3). Определить диаметры наружного и внутреннего кругов катания.

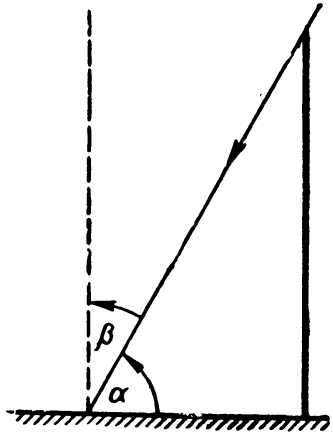


Черт. 3.

74. Самолет, видимый с базы поисковой группы под углом в 12°, радирует на базу, что он находится на высоте 800 *м* над разыскиваемым объектом. Найти расстояние от базы до разыскиваемого объекта.

75. На каком расстоянии одну от другой следует заготавливать ямки для посадки деревьев по краям аллеи, имеющей склон к горизонту в 12°, чтобы расстояние по горизонтали между центрами поперечников стволов деревьев равнялось 3 *м*?

76. Тень от вертикального шеста длиной в 1,30 *м* равна 72 *см* (черт. 4). Определить высоту солнца (угол наклона лучей солнца к горизонтали, на чертеже угол α) и зенитную высоту солнца (угол между вертикалью и направлением солнечных лучей, на чертеже угол β).



Черт. 4.

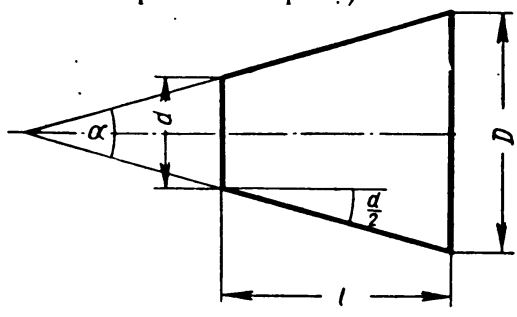
77. Трамвай идет со скоростью 600 *м/мин*, капли дождя падают вертикально со скоростью 12 *м/сек*. Под каким углом к горизонту дождь будет казаться падающим наблюдающему за ним по ходу трамвая пассажиру?

---

* Ответы к задачам № 71—92 вычислены при помощи логарифмической линейки.

78. Самолет, имея скорость 540 *км/час*, держит курс на север при восточном ветре силой 6 *м/сек*. Под каким углом к меридиану летчик должен держать ось самолета, чтобы полет шел без отклонения от курса?

79. Скорость течения реки 1,54 *км/час*, собственная скорость (в стоячей воде) пловца 30 *м/мин*. За сколько минут пловец может переплыть реку по кратчайшему расстоянию, если ширина реки равна 155 *м*? (Решить при помощи тригонометрии.)



Черт. 5.

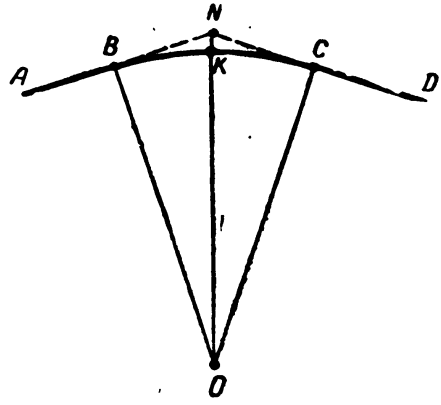
80. Железнодорожная насыпь в сечении представляет равнобочную трапецию. Угол ската (острый угол трапеции) насыпи равен 35°, ее высота равна 3,8 *м*, а ширина сверху — 9,8 *м*. Определить ширину насыпи в основании.

81. Угол подъема дороги (угол между полотном дороги и горизонтом) в среднем равен 2°. На какую высоту поднимается машина, прошедшая по дороге на подъем 2,40 *км*?

82. При обработке деталей машин, имеющих форму конуса или усеченного конуса, станок устанавливается на конусность детали. Конусность детали выражается отношением $\frac{D}{l}$ для полного конуса и $\frac{D-d}{l}$ для усеченного, где l — длина детали, а D и d — диаметры ее оснований (черт. 5).

а) Определить угол при вершине осевого сечения детали, имеющей форму полного конуса, если конусность детали равна 1:5.

б) Образующие осевого сечения детали, имеющей форму усеченного конуса, продолжены до пересечения, образуя угол в 2°52′. Определить конусность детали.



Черт. 6.

83. При разбивке на местности железнодорожного полотна провешиванием прямолинейных участков пути (AB и DC, черт. 6) находят точку их пересечения (N), затем путем расчета определяют на равном расстоянии от N начальные точки (B и C) закругления (определенного радиуса), сопряженно (плавным переходом) соединяющего прямолинейные участки пути (AB и CD).

Найти расстояние начальных точек закругления двух прямолинейных участков пути от точки их пересечения и ближайшее расстояние последней от закругления, если угол между прямолинейными участками ($\angle BNC$) равен 144°, а радиус закругления проектируется равным 400 *м*.

84. Две силы P и Q действуют на материальную точку под прямым углом друг к другу; сила R — их равнодействующая (диагональ прямоугольника, сторонами которого являются составляющие силы P и Q).

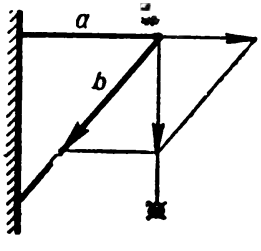
а) Составляющие силы равны 13,4 *кг* и 18,0 *кг*. Найти равнодействующую R и угол между нею и меньшей составляющей.

б) Сила R, равная 83,0 *кг*, образует с одной из составляющих угол в 38°15′. Найти составляющие силы P и Q.

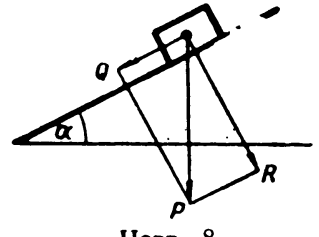
в) Равнодействующая R равна 58,4 *кг*, одна из составляющих сил равна 42,0 *кг*. Найти другую составляющую силу и угол между нею и равнодействующей.

85. Уличный фонарь весом в 18 *кг* подвешен при помощи кронштейна (черт. 7). Угол между стержнями a и b кронштейна равен 50°. Определить силу растяжения стержня a и силу сжатия стержня b.

86. Найти давление (R) тела весом (P) в 120 *кг* на наклонную плоскость, угол подъема (α) которой равен 27° (черт. 8).



Черт. 7.

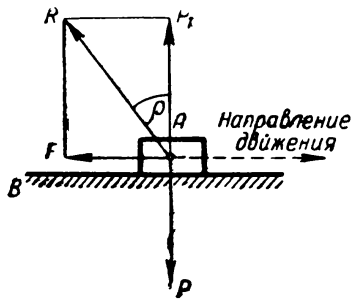


Черт. 8.

Указание. Разложить силу P на две составляющие: силу R, перпендикулярную к наклонной плоскости, и силу Q, параллельную плоскости. Вычислить силу R.

87. Тело A давит на опорную горизонтальную поверхность силой в P *кг* (вес тела A), сила P_1 нормальной реакции (противодействия)

опорной поверхности равна и противоположно направлена силе P; при скольжении тела A по опорной поверхности возникает сила трения F, направленная противоположно движению тела A (черт. 9). Угол (ρ) между равнодействующей R (сил F и P_1) и силой P_1 называется углом трения; коэффициент трения (k) равен тангенсу угла трения, сила трения F равна произведению давления тела на опорную поверхность на коэффициент трения ($P \cdot k$).



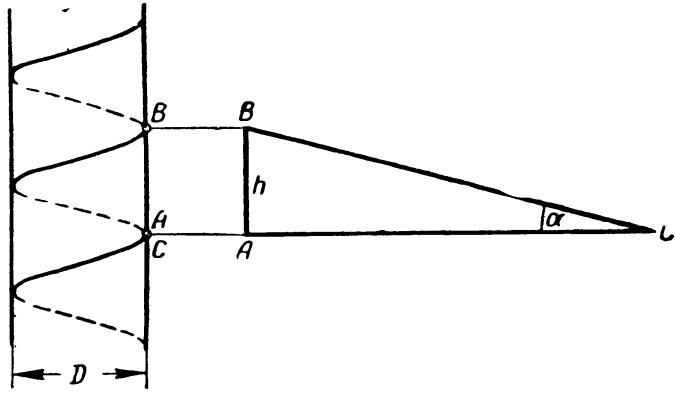
Черт. 9.

а) Определить угол трения, если при равномерном движении тела весом в 120 *кг* по горизонтальной поверхности действующая на тело параллельно опорной поверхности сила равна 24 *кг*.

Указание. Действующая сила равна силе трения и противоположно ей направлена.

б) Определить силу, которая действует на тело весом в 150 *кг* при равномерном его движении по горизонтальной поверхности, если угол трения равен 9°06′.

88. Найти силу, действующую параллельно наклонной плоскости на тело весом в 80 *кг* при его равномерном поднятии по наклонной плоскости, если угол подъема наклонной плоскости равен 30° и коэффициент трения равен 0,15.



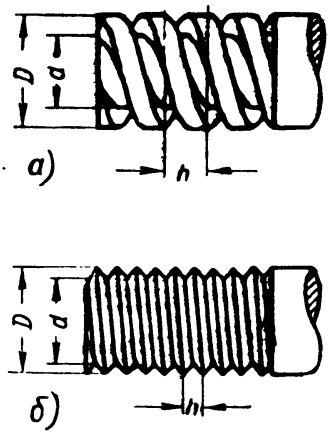
Черт. 10.

89. Пусть имеется цилиндрический стержень с диаметром D и прямоугольный треугольник ABC с катетом AC, равным πD, т. е. длине окружности поперечного сечения стержня (черт. 10). Если треугольник ABC навернуть на стержень так, чтобы вершины A и C совпали, то гипоте-

нуза BC опишет вокруг стержня винтовую линию, концы которой C и B расположатся на одной образующей цилиндра; снимая треугольник со стержня и вновь накладывая его на стержень, совместив предварительно вершину A с концом B винтовой линии, число ее оборотов (витков) можно продолжить. Если по винтовой линии сделать треугольную или прямоугольную вырезку, то получится винт (черт. 11, *а* и *б*).

Расстояние h (черт. 10, 11) между двумя последовательными пересечениями образующей цилиндра с винтовой линией называется шагом или ходом винта, он равен катету AB.

Угол α, под которым винтовая линия пересекает образующую (на чертеже 10 таким углом является угол C), называется углом подъема винтовой линии. тангенс этого угла для винтовой линии равен $\frac{h}{\pi D}$, а для винтовой резьбы $\frac{2h}{\pi(D+d)}$.

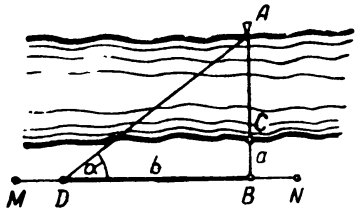


Черт. 11.

а) Определить угол подъема винта, если шаг винта равен 1,2 *мм*, наружный диаметр равен 7 *мм*, а внутренний—6 *мм*.

б) Внутренний диаметр резьбы равен 9,0 *мм*, наружный — 12,0 *мм*, угол подъема винта равен 4°20′. Определить ход винта.

90. Чтобы измерить ширину реки (оврага и т. п.), поступают следующим образом (черт. 12). На противоположном берегу замечают какой-либо предмет A (дерево, камень и т. п.) непосредственно у воды, а на своем берегу намечают две точки M и N так, чтобы прямая, проходящая через эти точки, была расположена на ровном месте; провешивают прямую. Далее, при помощи эккера находят на прямой MN точку B — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на MN, и измеряют расстояние $BC = a$ до берега. На прямой MN отмеряют определенной длины базис $BD = b$ и при помощи угломерного инструмента измеряют $\angle ADB = \alpha$. Данных a, b и α достаточно для определения ширины реки.

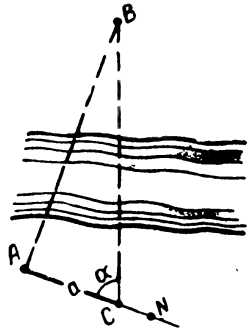


Черт. 12.

Вычислить ширину реки при $a = 8{,}0$ *м*, $b = 60{,}0$ *м*, $\alpha = 61°$.

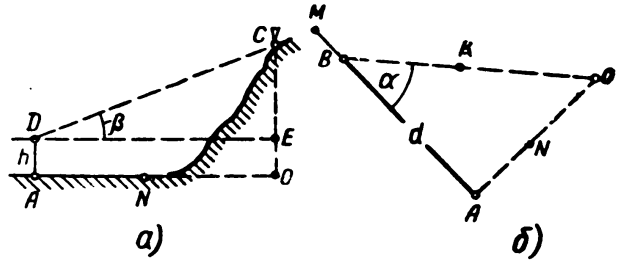
91. Пункты A и B (черт. 13) разделены рекой (озером и т. п.), требуется определить расстояние между этими пунктами. При помощи эккера провешивают прямую AN, перпендикулярную к AB, и на ней откладывают базис $AC = a$, после чего угломерным инструментом измеряют угол $ACB = \alpha$. Определить расстояние между пунктами A и B, если $a = 250$ *м* и $\alpha = 72°$.

92. Чтобы определить, на какой высоте над уровнем равнины расположена башня (черт. 14, *а*), поступают следующим образом.



Черт. 13.

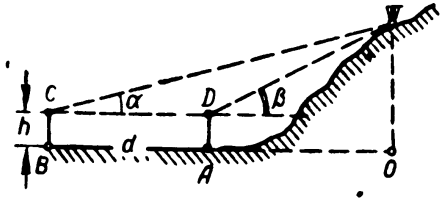
Из произвольной точки A равнины провешивается на равнине прямая AN в направлении на башню и прямая AM, перпендикулярная к AN (черт. 14, *б*), на которой откладывается базис AB в d *м*; провешивается прямая BK в направлении на башню и измеряется угол KBA (α). Далее, угломерным инструментом, поставленным в точке A на высоте h *м* (в точке D), измеряется угол (β) между направлением DC и горизонталью DE (черт. 14, *а*). Полученные данные обрабатываются.



Черт. 14.

Найти искомую высоту по следующим данным: $h = 1{,}0$ *м*, $d = 200$ *м*, $\alpha = 35°$, $\beta = 31°$.

Примечание. Эту задачу можно решить иначе (см. черт. 15). Описать, какие при этом следует выполнить операции.



Черт. 15.

93. Практические работы.

а) Определить зенитную высоту солнца.

б) Найти угол подъема винта.

Указание. $h = \frac{l}{n}$, где l—измеренный отрезок образующей и n—число витков на нем (см. задачу № 89).

в) Найти угол подъема лестницы, выполнив необходимые измерения по двум смежным ступенькам лестницы.

г) Определить конусность моделей полного и усеченного конуса.

Глава II

УГЛЫ И ДУГИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Обобщение понятия угла. Измерение углов.

Угол поворота луча.

94. Определить, какой образуется угол (в градусах) вращением минутной стрелки часов за: 1) 1 мин.; 2) 12 мин.; 3) 1 час; 4) 3 часа 20 мин.; 5) 12 час.; 6) 1 сутки; 7) 10 сут. 15 час. 25 мин.

95. Определить, какой образуется угол вращением часовой стрелки за: 1) 1 час; 2) 1 мин.; 3) 40 мин.; 4) 12 час.; 5) 1 сутки; 6) 3 сут. 20 мин.; 7) 15 сут. 20 час. 40 мин.

96. Стрелки показывают ровно 12 час. Через какой наименьший промежуток времени минутная стрелка часов вновь совместится с часовой стрелкой? (При решении опереться на углы поворота стрелок.)

97. Ведущее зубчатое колесо имеет 45 зубцов, сцепленное с ним ведомое колесо имеет 18 зубцов. Принимая направление вращения ведущего колеса за положительное, определить соответствующие друг другу углы поворота обоих колес при повороте ведущего колеса на: 1) 1 зубец; 2) 7 зубцов; 3) 45 зубцов; 4) 100 зубцов.

98. Привести пример угла поворота, миллионы лет возрастающего на один полный оборот в сутки.

99. Можно ли указать:

а) наибольшую абсолютную величину угла поворота?

б) наименьшую абсолютную величину угла поворота?

Радианная мера угла.

100. Что называется радианной мерой угла (дуги)? Какой угол (дуга) называется радианом?

101. В чем сходство и в чем отличие радианной меры центрального угла и радианной меры соответствующей ему дуги?

102. Сколько градусов и сколько радианов содержит полный угол (окружность) и какое основное соотношение имеется между градусной и радианной мерой угла, используемое при переходе от градусной меры угла к радианной и обратно?

103. (Устно.)

Если радианная мера угла в 180° равна $\pi \approx 3{,}14$, то чему равна радианная мера угла (точная и приближенная с точностью до 0,01):

1) 90°; 2) 270°; 3) 60°; 4) 45°; 5) 30°.

104. (Устно.)

Чему равна точная радианная мера углов:
1) 120°; 2) 135°; 3) 150°; 4) 210°; 5) 225°; 6) 240°;
7) —300°; 8) 315°; 9) 330°.

105. Пользуясь формулой перехода от градусной меры угла к радианной, вычислить радианную меру углов:
а) точно:
1) 40°; 2) —108°; 3) 165°; 4) —252°; 5) 105°; 6) 110°;
б) при помощи логарифмической линейки:
1) 2°23′; 2) 43′; 3) 15°07′; 4) 70°11′.

106. Найти по таблицам радианную меру углов:

1) 11°30′; 2) 74°28′; 3) —105°45′; 4) 311°45′; 5) —37′; 6) 1°52′.

107. (Устно.)

Найти градусную меру углов:

1) $\frac{3\pi}{10}$; 2) $\frac{7\pi}{4}$; 3) $\frac{13\pi}{18}$; 4) $\frac{11\pi}{9}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{17\pi}{12}$;
7) 0,79; 8) 3,14; 9) 0,52; 10) —1,05; 11) 1,57; 12) 4,71.

108. Пользуясь формулой перехода от радианной меры угла к градусной, найти градусную меру углов:
а) при помощи письменных вычислений:

1) $\frac{3\pi}{8}$; 2) $\frac{5\pi}{12}$; 3) $-\frac{3\pi}{25}$; 4) $\frac{35\pi}{27}$; 5) $-\frac{19\pi}{16}$; 6) $\frac{11\pi}{15}$;

б) при помощи логарифмической линейки (с точностью до 1′):

1) 2,15; 2) 0,342; 3) 0,0327; 4) 0,0047.

109. Найти по таблицам градусную меру углов:

1) 0,3061; 2) 2,0918; 3) —4,0020; 4) 0,0726; 5) 0,6; 6) 0,0067; 7) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$; 8) —1,426; 9) 1,0000.

110. Найти при помощи таблиц:

1) sin 1; 2) cos 1; 3) tg 1; 4) ctg 1; 5) $\sin\frac{2\pi}{5}$; 6) $\cos\frac{\pi}{12}$; 7) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; 9) sin 1,23; 10) cos 0,3; 11) tg 0,82; 12) $\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

111. (Устно.)

Определить, что больше:

1) sin 1 или 1;
2) cos 1 или 1;
3) tg 1 или 1;
4) ctg 1 или 1;
5) 0,5 или sin 1;
6) 0,8 или tg 0,8;
7) cos 0,93 или $\frac{1}{2}$;
8) ctg 0,72 или 0,96;
9) cos 1 или $\cos\frac{\pi}{3}$;
10) tg 1 или $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
11) $\sin\frac{\pi}{5}$ или sin 0,7;
12) ctg 0,4 или $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$.

112. (Устно.)

Определить, что больше:

1) sin 0,63 или cos 0,87;
2) sin 0,91 или cos 0,57;
3) tg 0,8 или ctg 1,32;
4) tg 0,47 или ctg 0,85;
5) sin 1,4 или cos 0,11;
6) tg 0,27 или ctg 1,32;
7) $\sin\frac{5\pi}{12}$ или $\cos\frac{\pi}{4}$;
8) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$ или $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{16}$.

113. При вычислениях с помощью логарифмической линейки радианная мера малых углов (до 5°40′), не превышающая 0,0990 и не меньшая 0,0100, принимается равной и синусу и тангенсу соответствующих углов, взятых с точностью до 0,0001; соответствующая градусная мера углов берется с точностью до 1′.

а) Найти градусную меру углов при помощи логарифмической линейки (1-й и 3-й примеры) и при помощи натуральных таблиц (2-й и 4-й примеры), если

1) $\alpha = 0{,}0426$; 2) $\beta = 0{,}0082$; 3) $\gamma = 0{,}0299$; 4) $\varphi = 0{,}0067$.

б) Какой пример из № 105 б и № 108 б можно и нужно решать проще?

114. Подъем или уклон железнодорожного пути измеряется в метрах на 1000 *м* горизонтального пути. Так, указатель уклона 6/1000 (дается на особых дощечках, устанавливаемых по краям железнодорожной насыпи) означает, что путь понижается на 6 *м* на каждые 1000 *м* горизонтального пути.

Найти радианную и градусную меру угла подъема железнодорожного пути по указателю 5/1000 и расстояние, пройдя которое поезд поднимется на 3,2 *м* (при решении учесть указания к предыдущей задаче).

115. Определить радианную и градусную меру угла подъема винтовой резьбы, если шаг винта равен 1,3 *мм*, наружный диаметр винта равен 8,0 *мм*, а внутренний — 7,0 *мм* (см. № 89).

116. Исходя из геометрической формулы площади (q) кругового сектора:

$$q = \frac{\pi R^2 \alpha}{360},$$

где α — градусная мера центрального угла (или соответствующей ему дуги), показать, что площадь сектора может вычисляться по формуле:

$$q = \frac{1}{2} R^2 \alpha,$$

где α — радианная мера центрального угла.

117. а) Найти длину дуги в 34° 16′, если радиус ее равен 18 *м*.

Указание. Для решения задачи воспользоваться формулой $l = R\alpha$, где l — длина дуги, α — ее радианная мера и R — радиус дуги.

б) Найти периметр кругового сектора радиуса 5,0 *дм* с дугой в 110°.

в) Найти радианную и градусную меру дуги длиной в 18,3 *м* при длине радиуса в 8,0 *м*.

г) Найти радианную и градусную меру центрального угла кругового сектора, площадь которого равна 42 $дм^2$, а радиус равен 1,6 *м*.

118. Движение тела называется вращательным, если все его материальные точки описывают при движении окружности, плоскости которых параллельны, а центры расположены на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения.

При равномерном вращении тела угол поворота (ω) радиуса (любой точки) в одну секунду называется угловой скоростью вращения (точки и тела); скорость движения (v) точки по окружности называется линейной скоростью; время (T) в секундах, за которое точка (тело) делает

один полный оборот, называется периодом вращения; пусть n — число оборотов в секунду.

Между величинами ω, v, T и n существует очевидная зависимость (по смыслу):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ или } T = \frac{1}{n};\ \omega = 2\pi n;\quad v = \omega R.$$

а) Определить период вращения и угловую скорость (в радианах в секунду):

1) вала, делающего 450 оборотов в минуту;

2) пропеллера при 2400 оборотах в минуту;

3) шкива, делающего 360 оборотов за 6 мин.

б) Определить линейную скорость вращающейся точки, удаленной от центра на 4,2 *дм*, если она делает 120 оборотов в минуту.

в) Найти период вращения колеса автомашины и его угловую скорость, если скорость машины равна 63 *км* в час; диаметр колеса автомашины равен 0,70 *м*.

Деление угломера.

119. Запись «0—37» означает 37 «тысячных» (или малых делений угломера), запись «5—07» означает 507 тысячных (или 5 больших и 7 малых делений угломера).

а) Выразить в градусной мере углы (с точностью до 1′):
1) 0—01; 2) 0—27; 3) 3—04.

б) Выразить в тысячных с точностью до 0—01 углы:
1) 1°; 2) 7° 12′; 3) 36′; 4) 54° 20′.

120. При измерении расстояний длина дуги малого деления угломера принимается равной $\frac{1}{1000}$ радиуса (отсюда название малого деления «тысячная»; при более точных расчетах длина дуги принимается равной $\frac{1}{955}$ радиуса).

Отсюда $D = 1000\frac{l}{n}$, где $D\,(R)$—дальность расстояния от наблюдателя до предмета, l — линейные размеры предмета, n—его угловая величина в тысячных.

При расчете дальности пользуются некоторыми заранее известными размерами предметов, например:

высота телеграфного столба	— 6 *м*,
расстояние между соседними телеграфными столбами	— 50 »,
высота железнодорожного вагона	— 3,5 »,
высота железнодорожной будки	— 4,0 »,
высота всадника	— 2,3 ».

а) Группа пешеходов проходит мимо телеграфного столба, видимого наблюдателем под углом 0—14. Определить расстояние от наблюдателя до пешеходов.

б) Вправо от моста, находящегося от наблюдателя в

3 *км*, с отклонением в 0—54 показался всадник. На каком расстоянии от моста находится всадник?

в) Расстояние от глаза до спичечной коробки, которая держится на вытянутой руке, равно 60 *см*. Определить угловые размеры длины, ширины и толщины коробки, если их линейные размеры равны соответственно: 5,4 *см*; 3,6 *см*; 1,8 *см*.

Другие единицы измерения угла.

121. Выразить в долях прямого угла (d), а также в градусной и радианной мере углы треугольника, величины которых находятся в отношении 2:3:4.

122. Географическую долготу места иногда выражают в особых единицах — часах (один час равен $\frac{1}{24}$ полного угла и делится еще на 60 мин., а минута делится на 60 сек.).

а) Выразить в часах, минутах и секундах географическую долготу:

1) $40°\,15'$; 2) $134°\,26'\,24''$.

б) Выразить в градусной мере географическую долготу:

1) 2 часа 40,2 мин.; 2) 10 час. 36 мин. 10 сек.

123. Найти острый угол x, если:

1) $\sin x = \frac{2\pi}{15}$; 2) $\cos x = \frac{\pi}{3}$;

3) $\operatorname{tg} x = \frac{7\pi}{15}$; 4) $\operatorname{ctg} x = \frac{13\pi}{5}$.

124. Как не следует и как надо понимать записанные в предыдущей (123) задаче числа:

$$\frac{2\pi}{15},\quad \frac{\pi}{3},\quad \frac{7\pi}{12},\quad \frac{13\pi}{5}?$$

125. Какое существует различие в понимании слова «угол» в геометрии и в тригонометрии?

126. Допустима ли запись и как ее нужно понимать:

$$\frac{3\pi}{5} = 108°?$$

127. Угол между диагоналями прямоугольника равен 60°. Найти в градусной и радианной мере углы между диагональю прямоугольника и его сторонами.

128. Как понимать выражение: «Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается», и при каких единицах измерения угла это выражение неприменимо?

129. Практические работы.

а) Определить период и угловую скорость вращения ведущей (педальной) зубчатки велосипеда при его скорости 12 *км* в час (без учета свободного хода). Необходимые для решения задачи данные взять в натуре (по велосипеду).

б) Приемом, указанным в задаче 120 (п. «в»), сделав предварительно нужные измерения, определить угловые размеры (они будут различны в силу неодинаковой длины руки): длины, ширины и толщины спичечной коробки, длины и толщины спички, толщины карандаша и т. п.

в) Определение расстояний при помощи изготовленных в предыдущей задаче (п. «б») индивидуальных угломерных инструментов и данных в задаче № 120.

§ 2. Построение углов и дуг произвольной величины

Координатная плоскость.

130. Построить на координатной плоскости от полуоси OX при помощи транспортира углы:

а) 115°; 315°; 232°; 77°; —110°; —200°.

б) $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{17\pi}{20}$; $\frac{11\pi}{10}$; $-\frac{11\pi}{18}$; $-\frac{7\pi}{5}$;

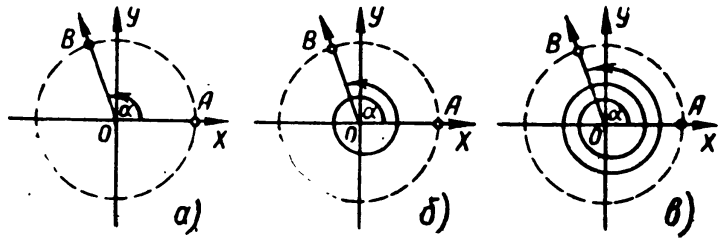
в) 4,32; 6,15; —1,12; 2,63.

131. Построить на координатной плоскости от полуоси OX при помощи циркуля и линейки углы:

а) 150°; 240°; 330°; —120°; —210°.

б) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

Указание. Построить правильный двенадцатиугольник с центром в начале координат и с вершиной на полуоси OX.



Черт. 16.

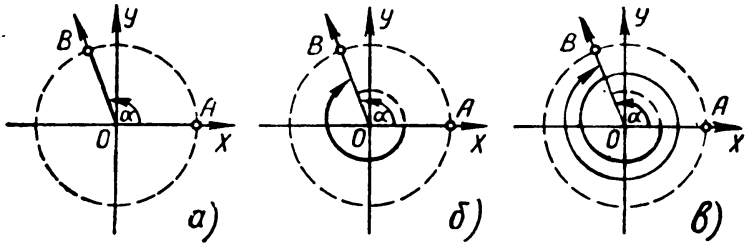
132. Луч OA, вращаясь в положительном направлении, в положении OB образует с полуосью OX угол α, равный 110° (черт. 16, *а*).

а) Вычислить значение угла α, если, продолжая вращение в том же направлении, луч OA сделает еще один полный оборот (черт. 16, *б*), два полных оборота (черт. 16, *в*).

Членами какой прогрессии будут три полученных значения угла α? Чему равна разность прогрессии?

б) Написать при помощи целого числа k ($k = 0; 1; 2; \ldots$) формулу общего члена (α) прогрессии, приняв за начальный ее член угол 110°; вычислить по полученной формуле значения угла α при $k = 5$ и $k = 7$.

133. Луч OA, заняв положение OB, образует с полуосью OX угол, равный 110° (черт. 17, *а*).



Черт. 17.

а) Вычислить значение угла α, когда луч OA от положения OB сделает в обратном направлении один полный оборот (черт. 17, *б*); два полных оборота (черт. 17, *в*).

Членами какой прогрессии будут три вновь полученных значения α? Чему равна разность прогрессии?

б) Написать при помощи целого числа n ($n = 0; 1; 2; \ldots$) формулу общего члена полученной прогрессии, приняв за начальный член угол в 110°; вычислить по этой формуле значение угла α при $n = 0$; $n = 3$; $n = 5$.

134. а) Вычислить по формуле общего члена прогрессии задачи 133 значения угла α при $n = 2$; $n = 4$.

б) Вычислить по формуле общего члена прогрессии задачи 132 значения угла α при $k = -2$; $k = -4$.

в) При каких значениях k по формуле общего члена прогрессии задачи 132 можно вычислять значения угла α прогрессии в задаче 133?

Указание. Формула $\alpha = 110° + 360° k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ (любое целое число), является общей для двух бесконечных прогрессий с начальным членом 110°: при положительных значениях k получаются члены прогрессии задачи 132, при отрицательных — члены прогрессии задачи 133; эту формулу называют формулой общего члена двухсторонней прогрессии:

$$\ldots; -610°; -250°; 110°; 470°; 830°; \ldots$$

Выражение общего члена двухсторонней прогрессии:

$110° + 360° n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, называют общим видом углов α от полуоси OX до их общей конечной стороны; при этом начальный член прогрессии (110° в данном примере) называют основным углом (за основной угол может быть принят любой член прогрессии)

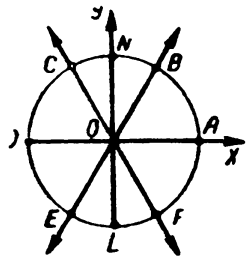
135. По данному общему виду углов

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + 2n\pi; \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$$

найти значения α, заключенные между -5π и 2π.

136. Точки A, B, C, D, E, F — вершины правильного шестиугольника (черт. 18). Написать в градусной и радианной мере общий вид углов от полуоси OX до конечной стороны:

1) OB; 2) OC; 3) OE; 4) OF;
5) OA; 6) ON; 7) OD; 8) OL.



Черт. 18.

137. а) Написать общий вид углов с основным положительным, не превышающим 2π (360°), и разностью 2π (360°), если один из углов этого вида равен:

1) 500°; 2) $\frac{9\pi}{4}$; 3) 950°; 4) $\frac{20\pi}{7}$.

б) Написать общий вид углов α, если:

1) $2\alpha = 160° + 360° n$;
2) $\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$;
3) $2\alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$;
4) $3\alpha + 20° = 80° + 360° k$;
5) $20° - \alpha = 70° + 180° n$.

Единичный круг и единичная окружность.

138. При каком условии длина дуги равна ее радианной мере?

139. Каким числом измеряется длина (l) дуги α единичной окружности, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и

$\alpha = 24°50'$; 2) $\sin\alpha = 0{,}7862$; 3) $\cos\alpha = \frac{2\pi}{7}$;

4) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}0842$; 5) $\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\alpha = 0 - 30$.

140. На единичной окружности при помощи транспортира найти концы дуг, измеряемых числами:

1) 102°; 2) 200°; 3) 650°; 4) $-300°$;

5) $\frac{5\pi}{12}$; 6) $-\frac{7\pi}{10}$; 7) $\frac{17\pi}{6}$; 8) $-\frac{13\pi}{20}$.

141. На единичной окружности построением при помощи циркуля и линейки найти концы дуг, измеряемых числами:

1) 45°; 2) 135°; 3) $-135°$; 4) $-45°$; 5) 495°;

6) $\frac{3\pi}{4}$; 7) $\frac{5\pi}{4}$; 8) $-\frac{7\pi}{4}$; 9) $-\frac{3\pi}{4}$; 10) $\frac{15\pi}{4}$;

11) 2,36; 12) 0,79; 13) $-3{,}93$; 14) $-0{,}79$; 15) 10,21.

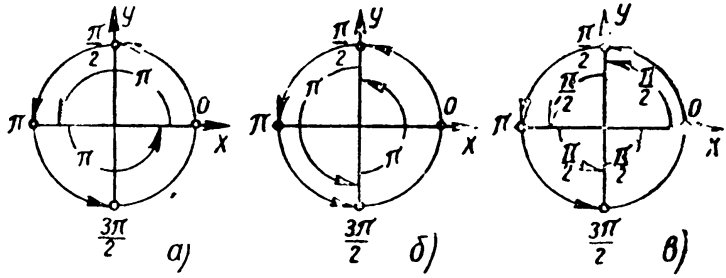
142. Написать общий вид дуг α (с основной неотрицательной и не превышающей 2π), оканчивающихся;

1) в правом конце горизонтального диаметра;

2) в левом конце горизонтального диаметра;

3) в верхнем конце вертикального диаметра;

4) в нижнем конце вертикального диаметра.



Черт. 19.

143. Дуги, оканчивающиеся в правом конце и оканчивающиеся в левом конце горизонтального диаметра, получаются последовательными поворотами радиуса на угол π (черт. 19, *а*) и потому могут рассматриваться членами одной двусторонней прогрессии с разностью π. Написать единую формулу общего вида дуг α, оканчивающихся в концах горизонтального диаметра, приняв за основную дугу 0.

144. По чертежу 19, *б* написать единую формулу общего вида дуг α, оканчивающихся в концах вертикального диаметра, приняв за основную дугу $\frac{\pi}{2}$.

145. По чертежу 19, *в* написать единую формулу общего вида дуг, оканчивающихся в концах обоих (и вертикального и горизонтального) диаметров, приняв за основную дугу 0.

146. По общему виду дуг, оканчивающихся в точке единичной окружности

$$\alpha = 1 + 2m\pi \qquad (m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots.),$$

найти с точностью до 0,01 значения дуг в промежутке между числами -17 и 15.

147. Любую точку единичной окружности можно рассматривать как изображение множества действительных чисел, которые соответствуют радианной мере дуг, оканчивающихся в этой точке.

В чем различие в изображении чисел точками единичной окружности и точками числовой оси?

148. Указать (для одного полного оборота луча в положительном направлении) границы углов в I, II, III и IV четвертях:

а) в градусной мере;

б) в точной радианной мере;

в) в радианной мере с точностью до 0,01.

149. Указать границы четвертей в градусной, точной радианной и приближенной (с точностью до 0,01) радианной мере для одного полного оборота луча в отрицательном направлении.

150. Определить, какой четверти принадлежат следующие углы (дуги):

1) 100°; 2) 310°; 3) $-200°$; 4) 800°; 5) 600°;

6) $-150°$; 7) $\frac{\pi}{3}$; 8) $\frac{7\pi}{6}$; 9) $-\frac{2\pi}{3}$; 10) $\frac{21\pi}{4}$;

11) $-\frac{4\pi}{11}$; 12) $\frac{8\pi}{3}$; 13) 0,80; 14) 4,86; 15) -7;

16) 2,15; 17) $-3,20$; 18) 14.

151. Точка единичной окружности, лежащая в конце дуги $\frac{\pi}{4}$, начала равномерное движение по окружности в положительном направлении со скоростью $\frac{2\pi}{3}\ \frac{1}{\text{сек.}}$. В какой четверти движущаяся точка будет через 1 сек.; 2 сек.; 3 сек.; 4 сек.; 5 сек.?

Глава III

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Тригонометрические функции произвольного угла

152. Почему определения тригонометрических функций, как соотношений между сторонами прямоугольного треугольника, непосредственно не распространяются на углы произвольной величины и в каком их определении возникает потребность?

153. Что называется абсциссой точки на плоскости? ординатой точки?

154. Какой знак имеет абсцисса точки в каждой из четвертей координатной плоскости? То же ордината точки?

155. В какой четверти координатной плоскости лежит точка с координатами: $(2, -3)$; $(0{,}4, 7)$; $\left(-\frac{1}{3}, -0{,}1\right)$; $\left(-4, \frac{2}{3}\right)$?

156. Почему знак отношений абсцисс или ординат произвольных точек, взятых на конечной стороне угла, к длине соответствующих им подвижных радиусов один и тот же для всех точек?

157. Что называется синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом, секансом и косекансом угла произвольной величины?

158. (Устно.)

Упростить выражения:

1) $\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$; 2) $\sin\alpha \cdot \sec\alpha$; 3) $\cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$;
4) $\cos\alpha \cdot \sec\alpha$; 5) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$; 6) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;
7) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha$; 8) $\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sec\alpha$; 9) $\sin\alpha : \operatorname{tg}\alpha$;
10) $\sec\alpha : \operatorname{cosec}\alpha$; 11) $\sec\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$; 12) $\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$;

13) $\frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\beta \cdot \sin\alpha}$; 14) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sec\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

159. Определить, при каком положении подвижного радиуса не существует: а) тангенса угла; б) котангенса угла; в) секанса угла; г) косеканса угла.

160. Найти все тригонометрические функции угла α по длине (r) подвижного радиуса и координатам (x и y) его конца:

а) $r = 5$, $x = -3$, $y = 4$; б) $r = 1{,}5$, $x = 1{,}2$, $y = -0{,}9$; в) $r = 0{,}13$, $x = -0{,}12$; $y = -0{,}05$.

161. Что называется осью тангенсов и осью котангенсов?

162. Чему равен синус, косинус, тангенс и котангенс угла на единичном круге?

163. Почему дугу можно также рассматривать как аргумент тригонометрических функций?

164. (Устно.)

Точка единичной окружности от начального положения на полуоси OX движется в положительном направлении, пробегая концы дуг любой величины.

Какое наибольшее и какое наименьшее значение принимает абсцисса и ордината движущейся точки и в каком ее положении на единичной окружности?

165. Записать при помощи неравенств множество всех значений $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, где α — произвольный угол (дуга).

166. (Устно.)

Какое наибольшее (y_{max}) и какое наименьшее (y_{min}) значение может принимать каждая из следующих функций и при каком значении соответствующей тригонометрической функции (например, $\sin x$ в первом примере и т. д.):

1) $y = 3 + 4\sin x$; 2) $y = 2 - 5\cos x$;
3) $y = 5 - \sin^2 x$; 4) $y = 4 + \cos(\alpha - 15°)$;
5) $y = 2 - \sin(\alpha - \beta)$;
6) $y = (a - b)\sin^2 x + b$ при $0 < a < b$;
7) $y = 4 - 3 \cdot |\sin x|$; 8) $y = \frac{1}{2 - |\cos x|}$.

167. Какое значение может принимать ордината точки пересечения продолжения подвижного радиуса с осью тангенсов?

Какие значения может принимать $\operatorname{tg}\alpha$, где α — произвольный угол (дуга)? Записать ответ неравенством.

168. Имеет ли наибольшее или наименьшее значение

1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $|\operatorname{tg}\alpha|$; 3) $\operatorname{tg}^2\alpha$?

169. Какие значения может принимать абсцисса точки пересечения продолжения подвижного радиуса с осью котангенсов?

Какие значения может принимать $\operatorname{ctg}\alpha$, где α — произвольный угол? Записать ответ неравенством.

170. Имеет ли наибольшее или наименьшее значение

1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $|\operatorname{ctg}\alpha|$; 3) $\operatorname{ctg}^2\alpha$?

171. Какие из шести тригонометрических функций могут принимать значение, равное

1) 0,3; 2) $-1{,}5$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{2}{3}$;

5) $\frac{3\pi}{4}$; 6) 14; 7) $\frac{a}{b}$ при $0 < a < b$;

8) $a + \frac{1}{a}$ при $a \neq 0$; 9) $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

§ 2. Знак тригонометрических функций

172. В какой полуплоскости абсцисса точки положительна, отрицательна?

В каких четвертях координатной плоскости значение косинуса угла — положительное число, отрицательное число?

173. В какой полуплоскости ордината точки — положительное число, отрицательное число?

В каких четвертях координатной плоскости значение синуса угла — положительное число, отрицательное число?

174. В каких четвертях координатной плоскости абсцисса и ордината точки имеют одинаковые знаки, противоположные знаки?

В каких четвертях координатной плоскости значения тангенса и котангенса — положительные числа, отрицательные числа?

175. В каких четвертях координатной плоскости имеют одинаковые знаки:

а) синус и косинус угла;

б) синус и тангенс угла;

в) косинус и котангенс угла;

г) тангенс и котангенс угла.

176. В каких четвертях координатной плоскости имеют разные знаки:

а) синус и косинус угла;

б) косинус и тангенс угла;

в) синус и котангенс угла.

177. Какие пары тригонометрических функций имеют одинаковые знаки во всех четвертях координатной плоскости?

178. Какой имеет знак:

1) $\sin 140°$; 2) $\cos 310°$; 3) $\operatorname{tg} 200°$; 4) $\operatorname{ctg} 400°$;

5) $\sin(-200°)$; 6) $\cos(-500°)$; 7) $\operatorname{tg} 110°$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$;

9) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; 10) $\sin\frac{15\pi}{4}$; 11) $\cos 2$; 12) $\operatorname{tg}(-5)$;

13) $\sin 10{,}26$; 14) $\operatorname{ctg} 4{,}6$.

179. Определить знак каждой из следующих разностей:

1) $\sin 40° - \sin 200°$; 2) $\cos 100° - \operatorname{tg} 250°$;

3) $\operatorname{ctg} 190° - \sin 110°$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{10} - \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}$; 6) $\cos\frac{11\pi}{8} - \sin\frac{9\pi}{4}$;

7) $\operatorname{tg} 1 - \cos 2$; 8) $\cos 3 - \operatorname{ctg} 4$;

9) $\sin 5 - \operatorname{tg} 4$.

180. Какие тригонометрические функции угла треугольника могут иметь отрицательные значения и когда именно?

181. Могут ли выражаться неположительными числами тригонометрические функции: половины угла треугольника; полусуммы двух углов треугольника; полуразности двух углов?

182. Какой четверти принадлежит угол β, если:

1) $-1 < \cos\beta < 0$; 2) $\operatorname{tg}\beta > 0$; 3) $\operatorname{ctg}\beta < 0$;

4) $-1 < \sin\beta < 0$; 5) $\cos\beta = 0{,}4$; 6) $\operatorname{tg}\beta = -\frac{2}{3}$;

7) $\sin\beta = 2$; 8) $\operatorname{ctg}\beta = 5$.

183. При каких значениях параметра a и какой четверти принадлежит угол x, если:

1) $\sin x = a$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{a}{2}$; 3) $\cos x = 1 - a$;

4) $\operatorname{ctg} x = a + 2$.

184. Какие функции называются четными и какие нечетными?

Какие из шести тригонометрических функций четные и какие нечетные?

185. Следующие выражения заменить тождественно равными, переменив знак аргумента:

1) $\cos(-18°)$; 2) $\sin(-100°)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $\operatorname{ctg}(-2)$; 5) $\sin^2\left(-\frac{\pi}{5}\right)$; 6) $|\operatorname{tg}(16°-\alpha)|$;

7) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{7}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}^2(2-\beta)$.

186. Упростить выражения:

1) $\sin(\alpha-15°)-\sin(15°-\alpha)$;
2) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$;
3) $\operatorname{tg}(2\alpha-5)+\operatorname{tg}(5-2\alpha)$;
4) $\operatorname{ctg}^2(\varphi-34°)+\operatorname{ctg}^2(34°-\varphi)$.

187. Указать, какие из нижеприводимых функций четные, какие нечетные, какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$; 2) $y=\sin^2 x$;
3) $y=1{,}1-\sin x$; 4) $y=2+\operatorname{tg}x$.

§ 3. Значения тригонометрических функций от углов:

$$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}$$

188. Чему равны координаты точки единичной окружности, лежащей на положительной полуоси OX?

Чему равен $\sin 0$, $\cos 0$, $\operatorname{tg} 0$, $\operatorname{ctg} 0$?

189. Чему равны координаты конца дуги $\frac{\pi}{2}$ единичной окружности?

Чему равен $\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$?

190. Чему равны координаты конца дуги π единичной окружности?

Чему равен $\sin\pi$, $\cos\pi$, $\operatorname{tg}\pi$, $\operatorname{ctg}\pi$?

191. Чему равны координаты конца дуги $\frac{3\pi}{2}$ единичной окружности?

Чему равен $\sin\frac{3\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$?

192. (Устно.)

Вычислить:

1) $\sin 180° + \operatorname{ctg} 90° + \cos 270° + \operatorname{tg} 0°$;
2) $\cos 180° + \operatorname{ctg} 270° - \sin 270°$;
3) $a\cos 0° + b\operatorname{tg} 180° + c\operatorname{ctg} 90°$;
4) $a^2 \sin\frac{\pi}{2} + b^2\cos 0 + 2ab\cos\pi$;
5) $2\cos\frac{\pi}{2} - 5\sin\frac{3\pi}{2} + 8\operatorname{tg}\pi$;
6) $4\sin\frac{\pi}{2} - 6\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} + 3\cos\pi$.

193. (Устно.)

Вычислить:

1) $\cos 0° + \sin(-90°) + \operatorname{ctg}(-270°)$;
2) $\cos(-180°) + \sin 90° + \operatorname{tg}(-180°)$;
3) $\sin(-270°) + \cos 0° + 4\operatorname{ctg}(-90°)$;
4) $3\cos(-\pi) + 3\sin\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;
5) $7\operatorname{tg}(-\pi) - 4\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\pi$;
6) $a \cdot \operatorname{tg} 0 + b \cdot \sin(-\pi) - c \cdot \cos(-\pi) - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

194. В единичную окружность вписан правильный шестиугольник так, что один из его диаметров совмещается с вертикальным диаметром окружности; абсциссой конца дуги $\frac{\pi}{6}$ является апофема правильного шестиугольника, а ординатой — половина стороны правильного шестиугольника.

Чему равен $\sin\frac{\pi}{6}$; $\cos\frac{\pi}{6}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$?

195. Зная значения тригонометрических функций угла (дуги) $\frac{\pi}{6}$, сказать, чему равен $\cos\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

196. Сторона вписанного в единичную окружность квадрата перпендикулярна к полуоси OX. Чему равны координаты конца дуги $\frac{\pi}{4}$ и $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$?

197. (Предпочтительно устно.)

Вычислить:

1) $\sin 30° + \cos 60° + \operatorname{tg} 45°$;
2) $2\cos 30° - \operatorname{tg} 60° + \operatorname{ctg} 45°$;
3) $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{4}$;
4) $2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}$;
5) $\cos 60° - \operatorname{tg}(-45°) + \sin(-30°)$;
6) $2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;
7) $\sin^2\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;
8) $4\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 4\cos\frac{\pi}{3}$.

198. Вычислить:

1) $\sin\frac{\pi}{2} + \left|\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| + \cos\pi - \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\frac{\pi}{3}$;
2) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| + \cos\pi$;
3) $\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}(-\pi) - \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left|\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right| + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;
4) $\left|\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| + \cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\pi + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

§ 4. Основные тригонометрические тождества

199. (Устно.)

Упростить выражения:

1) $1 - \cos^2\alpha$;
2) $\sin^2\beta - 1$;
3) $\cos\gamma \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{cosec}\gamma$;
4) $(1 + \sin x)(1 - \sin x)$;
5) $\cos^2\varphi(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)$;
6) $\operatorname{tg} y \cdot \sin y \cdot \operatorname{ctg} y$;
7) $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$;
8) $\operatorname{cosec}^2 z - 1$;
9) $1 - \sec^2\beta$;
10) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \operatorname{ctg}^2\varphi$;
11) $\operatorname{ctg}\beta(\sec^2\beta - 1)$;
12) $\sin^2\varphi(1 + \operatorname{ctg}^2\varphi)$;
13) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$;
14) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$;

15) $\cos^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x$; 16) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha}$;

17) $(\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha)(\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha)$; 18) $(\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha$;

19) $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \cos^2\alpha$.

200. Какой четверти угол α, если:

1) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$; 2) $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$;

3) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$; 4) $|\operatorname{ctg}\alpha| = -\operatorname{ctg}\alpha$.

201. Выполнить действия:

1) $\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha \cdot |\cos\alpha|$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot |\sin\alpha|$; 4) $\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}$.

202. Какой знак (и почему) может иметь каждая из остальных тригонометрических функций, если $\sin x > 0$, $\sin x < 0$?

203. Заполни таблицу знаков тригонометрических функций, когда задан знак одной из функций:

$\cos\alpha$	+	−												
$\sin\alpha$			+	−										
$\operatorname{tg}\alpha$					+	−								
$\operatorname{ctg}\alpha$							+	−						
$\sec\alpha$									+	−				
$\operatorname{cosec}\alpha$											+	−		

204. Зная выражения каждой из четырех тригонометрических функций ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$), через любую из остальных трех вычислить:

а) $\sin\alpha$, если:

1) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $90° < \alpha < 180°$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$ и $270° < \alpha < 360°$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$.

б) $\cos\alpha$, если:

1) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha = -4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $180° < \alpha < 270°$;

2) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

г) $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5}$.

205. Вычислить остальные три тригонометрические функции, если

1) $\operatorname{tg} x = 2$;

2) $\cos x = -\frac{7}{25}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$;

3) $\sin x = -\frac{a}{b}$ и $0 < a < b$;

4) $\operatorname{ctg} x = \frac{7}{24}$ и $180° < x < 270°$;

5) $\sin x = \frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$;

6) $\cos x = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

7) $\operatorname{tg} x = \frac{b}{c} (b \neq 0,\ c \neq 0)$; 8) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{2}$.

Упростить выражения (206—209 предпочтительно устно).

206. 1) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{1 - \cos\alpha}$;

3) $\frac{1 - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$. 4) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - 1}$;

5) $\frac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; 6) $\frac{\sin 37^\circ \cdot \cos 53^\circ}{1 - \cos^2 37^\circ}$.

207. $\frac{1 - 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2}$.

208. $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

209. $(\sin\beta + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \cos\beta)^2$.

Упростить выражения (210—212).

210. $\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta$.

211. 1) $\sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}}$; 2) $\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$; 4) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}}$.

212. (Устно.)

1) $\frac{\sec\alpha - 1}{1 - \cos\alpha}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$; 3) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha}$;

4) $\frac{\sin\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}$; 5) $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

213. Выразить через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$; 3) $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$;

214. Выразить через $\operatorname{tg}\alpha$:

1) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$; 3) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

Доказать тождества (215 — 223).

215. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

216. $\cos\alpha = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$. **217.** $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

218. $\dfrac{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$.

219. $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

220. $\dfrac{1 - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^4\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

221. $\cos^2\alpha\,(1 - \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.

222. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha$.

223. (Устно.)

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \sin^2\alpha$; 2) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

3) $\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$; 4) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - 1} = \dfrac{1 - \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$;

5) $\dfrac{1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha}{1 + \sec\alpha + \sec^2\alpha} = \cos^2\alpha$; 6) $\dfrac{1}{1 + \sin^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2\alpha} = 1$.

224. Найти значение выражения $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.

225. Найти значение произведения $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = r$.

226. Найти значение выражения $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = S$.

227. Найти наибольшее и наименьшее значение функций:

1) $y = 3\sin^2 x - 2\cos^2 x$; 2) $y = \cos^2 x + 2\sin^2 x$.

228. Исключить угол α из системы равенств, т. е. из данной системы равенств составить одно, выражающее соотношение между x и y и не содержащее функции угла α:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha = x \\ \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin\alpha - \cos\alpha = x \\ \sin^3\alpha - \cos^3\alpha = y. \end{cases}$

229. Для малых углов (см. № 113) косинус угла можно вычислять приближенно по формуле $\cos x \approx 1 - \frac{\sin^2 x}{2} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, где x — радианная мера угла; погрешность при таком вычислении меньше 0,0001.

Пользуясь приведенной формулой, вычислить при помощи таблиц и при помощи логарифмической линейки:

1) $\cos 0{,}0863$; 2) $\cos 0{,}0106$; 3) $\cos 0{,}0429$.

§ 5. Построение угла по данному значению его тригонометрической функции

Построение угла.

230. Построить угол α $(0 < \alpha < 2\pi)$ по следующим значениям его тригонометрических функций:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; 2) $\sin\alpha = -0{,}8$;

3) $\cos\alpha = 0{,}6$; 4) $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = -2$;

7) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}5$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}5$;

9) $\sin\alpha = -0{,}4$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; 10) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ и $\operatorname{tg}\alpha < 0$;

11) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$ и $\sin\alpha < 0$; 12) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$ и $\cos\alpha < 0$.

Указание. В каждом случае предварительно установить, сколько (и почему) требуется построить углов?

Главный угол (дуга).

231. Какие из главных углов (дуг) — $\arccos m$, $\arcsin m$, $\operatorname{arctg} m$, $\operatorname{arcctg} m$ — и при каких значениях m могут принимать: а) отрицательные значения? б) значения больше $\frac{\pi}{2}$?

232. Построить дуги:

1) $\arcsin\frac{3}{4}$; 2) $\arcsin(-0{,}5)$; 3) $\arccos 0{,}4$;

4) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$; 5) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{arctg}(-1{,}5)$;

7) $\operatorname{arcctg} 2$; 8) $\operatorname{arcctg}(-3)$.

233. Найти углы.

а) (Устно). В радианной мере:

1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\arccos 0$; 3) $\operatorname{arc\,tg} 1$;

4) $\operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3}$; 5) $\arcsin 1$; 6) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\operatorname{arc\,tg} 0$; 8) $\operatorname{arc\,ctg} 0$.

б) В градусной мере:

1) $\arccos 0{,}8312$; 2) $\arcsin \frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{arc\,tg} 2\frac{4}{7}$;

4) $\operatorname{arc\,ctg} \frac{\pi}{3}$; 5) $\arccos \frac{\pi}{3}$; 6) $\arcsin 2$.

в) В радианной и градусной мере при помощи таблиц и логарифмической линейки:

1) $\arcsin 0{,}0536$; 2) $\operatorname{arc\,tg} 0{,}0079$;

3) $\arcsin 0{,}0036$; 4) $\operatorname{arc\,tg} 0{,}0749$.

234. Выразить острые углы A и B прямоугольного треугольника через его гипотенузу c и катет a.

235. Выразить через стороны a и b прямоугольника угол (α) между диагональю прямоугольника и стороной a и угол (β) между диагональю и стороной b.

236. Выразить угол (α) при основании и угол (β) при вершине равнобедренного треугольника:

а) через его основание a и боковую сторону c;

б) через его основание a и высоту h.

237. Найти острые углы египетского треугольника.

238. При каких отрицательных значениях a существует и какой четверти принадлежит:

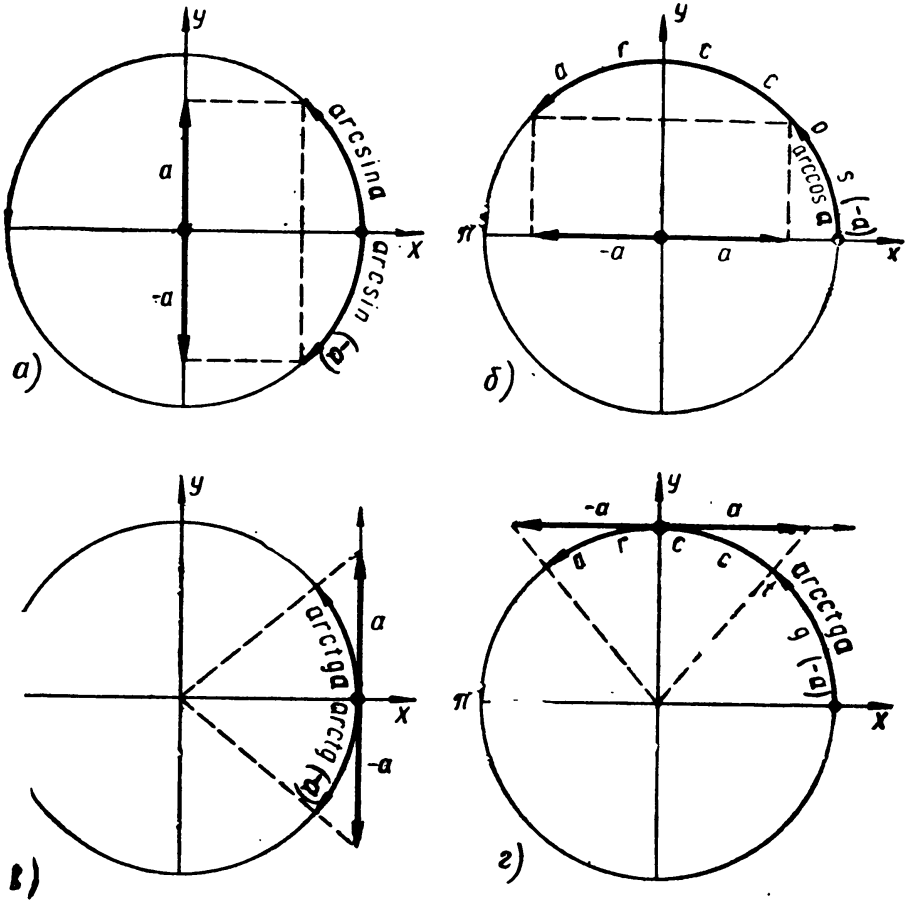
1) $\arcsin a$; 2) $\arccos a$; 3) $\operatorname{arc\,tg} a$; 4) $\operatorname{arc\,ctg} a$.

239. а) По чертежу 20, *а* выразить $\arcsin(-a)$ через $\arcsin a$;

б) по чертежу 20, *б* выразить $\arccos(-a)$ через $\arccos a$;

в) по чертежу 20, *в* выразить $\operatorname{arc\,tg}(-a)$ через $\operatorname{arc\,ctg} a$;

г) по чертежу 20, *г* выразить $\operatorname{arc\,ctg}(-a)$ через $\operatorname{arc\,ctg} a$.



Черт. 20.

240. Найти значения главных углов (дуг).

а) (Устно.) В радианной мере.

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}(-1)$; 4) $\operatorname{arcctg}(-1)$;

5) $\arcsin(-1)$; 6) $\arccos(-1)$;

7) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

9) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 10) $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

11) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 12) $\operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3})$;

13) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 14) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

б) В градусной мере:

1) $\arccos(-2)$; 2) $\arcsin(-0{,}2764)$;

3) $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)$;

5) $\operatorname{arc\,tg}(-2)$; 6) $\operatorname{arc\,ctg}(-0{,}7)$.

в) В радианной и градусной мере при помощи таблиц и логарифмической линейки:

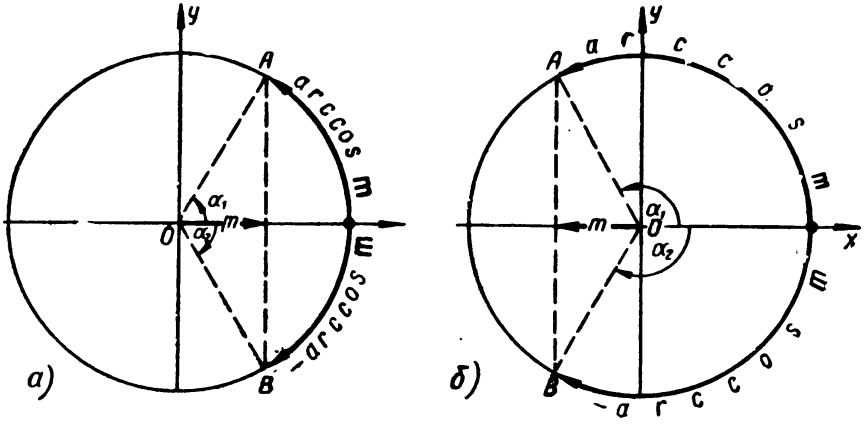
1) $\arcsin(-0{,}0274)$; 2) $\operatorname{arc\,tg}(-0{,}0083)$;
3) $\arcsin(-0{,}0067)$; 4) $\operatorname{arc\,tg}(-0{,}0832)$.

Общий вид углов (дуг).

241. $\cos\alpha = m$, где $0 < |m| < 1$.

При $0 < m < 1$ (черт. 21, *а*) и $-1 < m < 0$ (черт. 21, *б*) построением получаем два положения конечной стороны углов: OA и OB. В обоих случаях (см. № 134):

$$\alpha_1 = \arccos m + 2k\pi \text{ и } \alpha_2 = -\arccos m + 2k\pi.$$



Черт. 21.

Обычно обе формулы объединяют в одну:

$\alpha = \text{Arc}\cos m = \pm \arccos m + 2k\pi, \qquad k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ldots$

Частные случаи (см. также № 142, 144).

1) $m = 1$, $\cos\alpha = 1$; $\alpha = 2k\pi$ или $360°n$.

2) $m = -1$, $\cos\alpha = -1$; $\alpha = \pi(2n+1)$ или $180°(2n+1)$.

3) $m = 0$, $\cos\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ или $90°(2k+1)$.

4) $|m| > 1$, углов не существует.

Решить уравнения:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

3) $\cos 2x = \frac{1}{2}$;

4) $\cos x = 0{,}7126$;

5) $\cos(x + 58°) = -0{,}4695$;

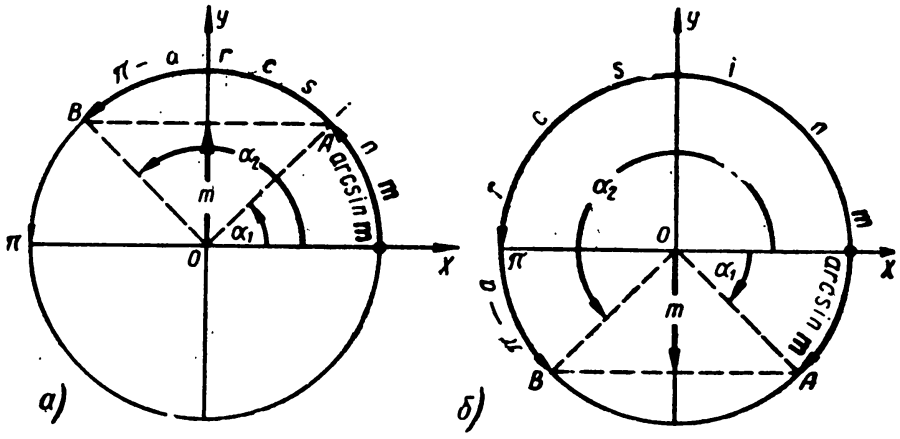
6) $\cos^2 x = 1$;

7) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$;

8) $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

242. $\sin\alpha = m$, где $0 < |m| < 1$.

При $0 < m < 1$ (черт. 22, *а*) и при $-1 < m < 0$ (черт. 22, *б*) построением получаем:



Черт. 22.

$\alpha_1 = \arcsin m + 2n\pi$; $\alpha_2 = \pi - \arcsin m + 2n\pi = -\arcsin m + \pi(2n+1)$.

Обе формулы можно (но не обязательно) объединить в одну:

$$\alpha = \operatorname{Arc}\sin m = (-1)^n \operatorname{arc}\sin m + n\pi,$$

откуда при n четном получаются углы первой формулы, а при n нечетном — углы второй.

Частные случаи.

1. $m = 1$, $\sin\alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2}(4k+1)$ или $\alpha = 90° + 360°n$.

2. $m = -1$, $\sin\alpha = -1$, $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{2}(4n-1)$ или $\alpha = -90° + 360°\,k$.

3. $m = 0$, $\sin\alpha = 0$ (см. № 143); $\alpha = n\pi$ или $\alpha = 180°\,n$.

4. $|m| > 1$, углов не существует.

Решить уравнения:

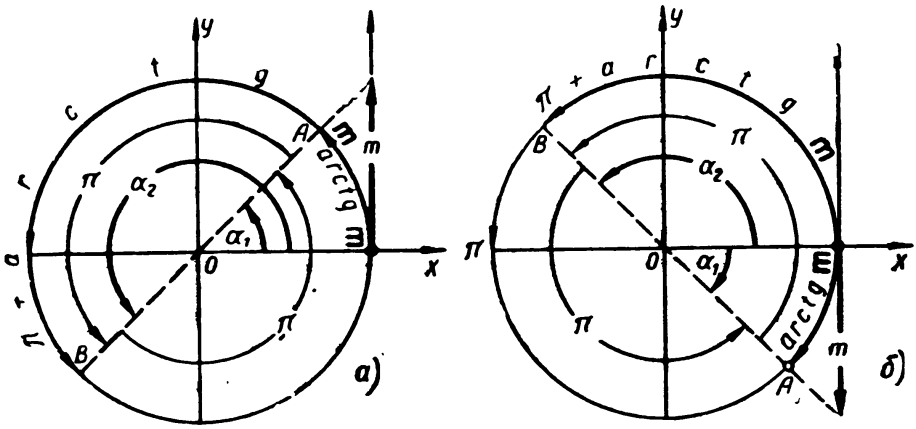
1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $|\sin x| = 1$;

5) $\sin 3x = 0{,}5446$; 6) $2\sin^2 x + 3\sin x = 0$;

7) $\sin x = 0{,}0276$.

243. $\operatorname{tg}\alpha = m$.



Черт. 23.

При $m > 0$ (черт. 23, *а*) и при $m < 0$ (черт. 23, *б*) имеем:

$\alpha_1 = \operatorname{arctg} m + 2k\pi$, $\alpha_2 = \pi + \operatorname{arctg} m + 2k\pi = \operatorname{arctg} m + \pi(2k+1)$.

Но углы α_1 и α_2 можно рассматривать как члены одной двухсторонней прогрессии с разностью π, поэтому две формулы заменяются одной:

$$\alpha = \text{Arc tg } m = \text{arc tg } m + n\pi.$$

Частный случай.

При $m = 0$, $\text{tg}\,\alpha = 0$ (см. № 143); $\alpha = n\pi$ или $\alpha = 180°n$.

Решить уравнения:

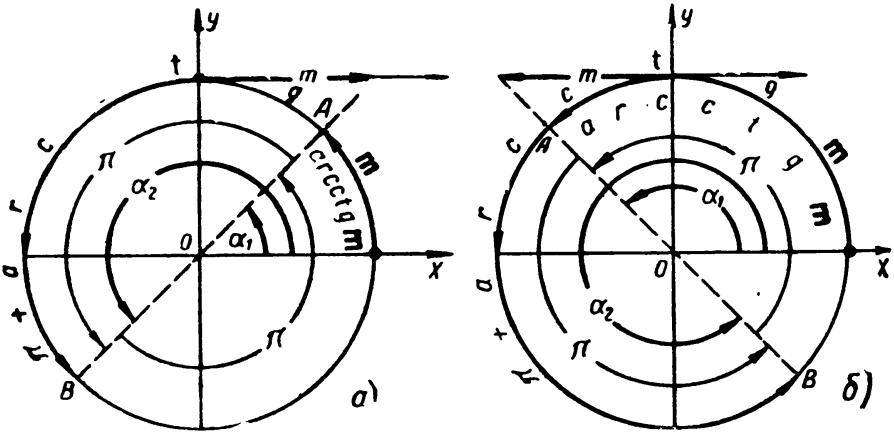
1) $\text{tg}\,x = -\sqrt{3}$; 2) $\text{tg}\,x = 0{,}0057$;

3) $\text{tg}^2 x + 3\ \text{tg}\,x = 0$; 4) $\text{tg}\,(3x + 22°) = -2{,}145$.

244. $\text{ctg}\,\alpha = m$.

При $m > 0$ (черт. 24, *а*) и при $m < 0$ (черт. 24, *б*) имеем:

$$\alpha = \text{Arc ctg } m = \text{arc ctg } m + n\pi.$$



Черт. 24.

Частный случай.

$m = 0$, $\text{ctg}\,\alpha = 0$ (см. № 144); $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ или $\alpha = 90°(2n+1)$.

Решить уравнения:

1) $\text{ctg}\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\text{ctg}\,x = \frac{2\pi}{5}$; 3) $|\text{ctg}\,x| = 1$;

4) $\text{ctg}^2 x - 5\ \text{ctg}\,x = 0$.

§ 6. Дополнительный к главе III

245. (Устно.)

Вычислить:

1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} 1$; 2) $\arccos 1 + \operatorname{arc\,tg} 0$;

3) $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\operatorname{ars\,cos} 0 - 2 \arcsin \frac{1}{2}$;

5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3}$; 6) $\pi - \operatorname{arc\,ctg} 1$;

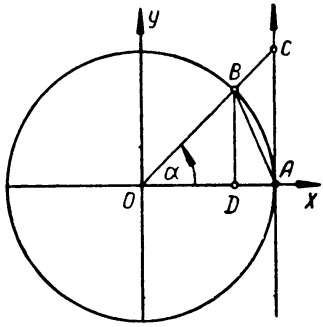
7) $2 \operatorname{arc\,tg} 1 - \arcsin 1$; 8) $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \arccos 0$;

9) $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})$.

246. Что больше:

1) $\arcsin 1$ или 1; 2) $\arccos 1$ или 1; 3) $\operatorname{arc\,tg} 1$ или 1; 4) $\operatorname{arc\,ctg} 0$ или 1?

247. Доказать, что хорда единичной окружности равна удвоенному синусу половины центрального угла, соответствующего хорде.



Черт. 25.

248. Доказать (черт. 25), что $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, где α—радианная мера угла.

Указание. Сопоставить площади: $\triangle OBA$, сектора OBA и $\triangle OCA$.

249. Найти остальные тригонометрические функции угла α, если

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2}{b^2} \text{ и } \sin\alpha < 0.$$

250. а) Найти остальные тригонометрические функции угла α, если

$$\sin\alpha = \frac{1}{m^2} \text{ и } \operatorname{ctg}\alpha < 0.$$

При каких значениях m вычисления имеют смысл?

б) Найти $\sec\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{a^2-1}$. Какие значения может принимать параметр a?

251. Как понимать символы:

$$\arcsin a;\ \arccos a;\ \operatorname{arctg} a;\ \operatorname{arcctg} a?$$

252. Какими из четырех символов — $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$ — можно записать:

1) любой угол треугольника; 2) половину угла треугольника?

253. Как прочитать символы:

1) $\sin(\arcsin a)$; 2) $\cos(\arccos a)$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)$; 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)$?

254. При каких значениях a имеют место тождества:

1) $\sin(\arcsin a) = a$; 2) $\cos(\arccos a) = a$;
3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$; 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$?

255. (Предпочтительно устно.)

Вычислить:

1) $\sin(\arcsin 0{,}23)$; 2) $\cos(\arccos 1{,}2)$;

3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{2\pi}{3}\right)$;

5) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}(\arcsin 1)$;

7) $\cos(\arcsin 0)$; 8) $\operatorname{ctg}(2\arcsin 1)$;

9) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 10) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{12}{13}\right)$;

11) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$; 12) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

13) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; 14) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)$;

15) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$; 16) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$;

17) $\operatorname{ctg}\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$; 18) $\cos\left[\operatorname{arc\,tg}(-1)\right]$;

19) $\operatorname{tg}\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$; 20) $\sin\left[\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})\right]$.

256. Упростить выражения:

1) $(1+\sin\alpha)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha)$;

2) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\cos^4\alpha$;

3) $\frac{\sin(\alpha-\beta)-\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)}$;

4) $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\ldots\operatorname{tg}88^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ$;

5) $\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha}+\frac{2}{1-\cos\alpha}}$.

257. Доказать тождества:

1) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$;

2) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$;

3) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$;

4) $1+\cos\alpha=\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$;

5) $\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)+\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

6) $\sin^2\alpha(\operatorname{ctg}\alpha+2)(2\operatorname{ctg}\alpha+1)-2=5\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

7) $\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right):(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-1)=\sin\alpha+\cos\alpha$.

258. Решить уравнения:

1) $\arccos(x-2)=\frac{\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arc\,ctg}(2x-1)=\frac{\pi}{2}$;

3) $\operatorname{arc\,tg}(x-1)=\frac{\pi}{4}$.

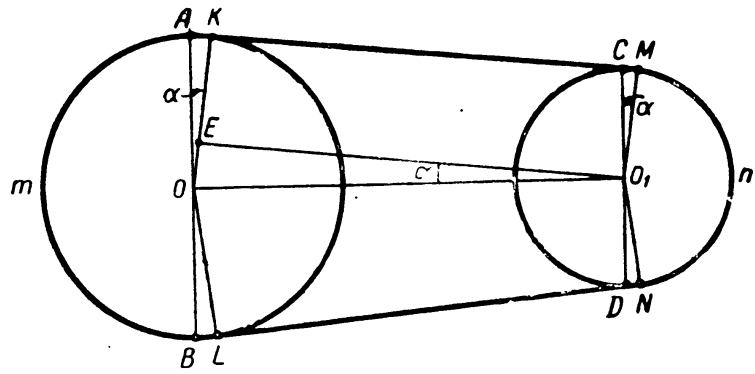
259. Вычислить выражения:

а) $\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ и $90° < \alpha < 180°$.

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\cos\alpha = -0{,}6$.

260. Доказать, что выражение $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$ не может быть отрицательным числом.

261. Для передачи вращательного движения от двигателя к станку употребляется ременная передача (черт. 26).



Черт. 26.

Шкив O — ведущий (двигателя), шкив O_1 — ведомый (станка). Диаметр AB ведущего шкива равен D, диаметр CD ведомого равен d. Линия центров OO_1 равна a. Дуга KmL — дуга охвата (соприкосновения) туго натянутым ремнем ведущего шкива, дуга MnN — дуга охвата ведомого шкива, α — радианная мера угла (α — малый угол).

1) Показать, что дуга (угол) охвата ведомого шкива равна (в радианах)

$$\pi - \frac{D-d}{a}.$$

2) Показать, что длина (l') части KM ремня может быть приближенно (достаточно для практики) вычислена по формуле (см. № 229):

$$l' = a - \frac{(D-d)^2}{8a}.$$

3) Показать, что длина ременной передачи (l) приближенно может быть вычислена по формуле:

$$l \approx \frac{\pi (D + d)}{2} + 2a + \frac{(D - d)^2}{4a}.$$

4) Вычислить угол охвата ведомого шкива и длину ременной передачи при $D = 60$ *см*, $d = 20$ *см* и $a = 4{,}00$ *м*.

262. Решить уравнения:

1) $\cos \frac{\pi}{2} + \cos x = 1$;
2) $\sin 30^\circ + \cos x = 1$;
3) $2 \sin x + \sqrt{2} = 0$;
4) $3 \operatorname{ctg}(x + 17^\circ) + \sqrt{3} = 0$;
5) $2 \sin 2x + \sqrt{3} = 0$;
6) $4 \cos^2 2x - 3 = 0$;
7) $\sin^2 x + 5 \sin x + 4 = 0$;
8) $\cos^2 x + 7 = 8 \cos x$;
9) $2 \cos^2 x = 3 \sin x$;
10) $2 \sin^2 x = 5 \cos x + 2$;
11) $\cos^2 x - 1 = \sin x$;
12) $2 \operatorname{tg}^2 (x + 40^\circ) = \operatorname{tg} (x + 40^\circ)$.

263. Практическая работа.

Найти вычислением число звеньев цепной передачи велосипеда, измерив диаметры ведущей и ведомой зубчаток (по окружности, проходящей через центры роликов надетой цепи), линию центров, среднюю длину звена цепи.

Результат проверить подсчетом звеньев цепи.

Глава IV

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

§ 1. Теоремы сложения

Расстояние между двумя точками координатной плоскости.

264. а) Построить на оси направленный отрезок ($\overline{AB}$), вычислить его величину (вел.$\overline{AB}$) и длину (AB) по координатам его начала (A) и конца (B):

1) A (2), B (—3); 2) A (—1), B (3); 3) A (—2), B (—4); 4) A (—3), B (—1).

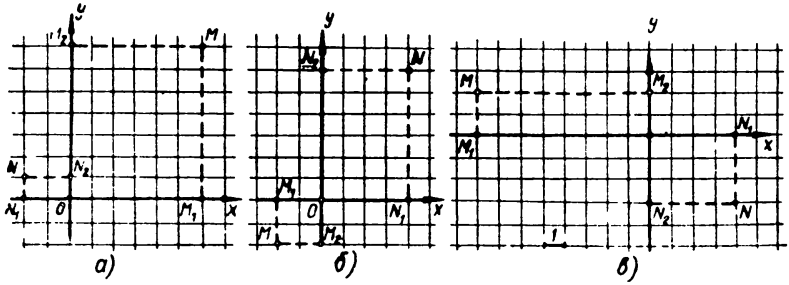
Указание. Величина отрезка на оси вычисляется по формуле:

$$\text{вел. } \overline{AB} = \text{вел. } \overline{OB} - \text{вел. } \overline{OA} = x_2 - x_1,$$

где x_1 — координата начала и x_2 — координата конца отрезка; длина отрезка вычисляется по формуле:

$$AB = |\text{вел. } \overline{OB} - \text{вел. } \overline{OA}| = |x_2 - x_1|.$$

б) Найти величины тех же заданных отрезков $\overline{AB}$ непосредственно по чертежу (на числовой оси), сравнить с вычисленными.



Черт. 27.

265. Найти (черт. 27 *а*, *б* и *в*) координаты точек M и N и по их координатам вычислить: вел. $\overline{M_1N_1}$ и вел. $\overline{M_2N_2}$, длины M_1N_1 и M_2N_2, расстояние MN.

Изменится ли в каждом случае (*а*, *б* и *в*) вел. $\overline{M_1N_1}$, если взаимно поменять название точек M и N? Изменится ли при этом длина M_1N_1, расстояние MN?

266. Почему формула

Теоремы сложения.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

выведенная на основании теоремы о квадрате расстояния между двумя точками на координатной плоскости для одного частного положения концов дуг α и β, верна для дуг (углов) α и β произвольной величины?

Может ли разность $\alpha-\beta$ равняться: 1000°; 0; $-4{,}2\pi$? (Ответ на последний вопрос иллюстрировать примерами значений α и β.)

267. Почему формула $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$ верна при произвольных значениях α и β?

268. Вычислить $\cos 15°$, представив 15° как разность 60°—45°.

269. Вычислить $\cos(\alpha-\beta)$ при условии, что $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ при $90°<\alpha<180°$ и $\sin\beta=-\frac{5}{13}$ при $180°<\beta<270°$.

270. Упростить выражение:

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$$

271. Найти $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\sin\alpha=-0{,}6$ при $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

272. Доказать, что при любом значении α справедливо равенство:

$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha.$$

273. Вычислить: 1) $\cos\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{12}{13}+\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}\right)$;

2) $\cos\left(\arccos\frac{15}{17}-\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)$.

274. Значением какого главного угла можно выразить сумму любых двух углов I четверти? разность таких же углов?

275. Выполнить действия и результат выразить в градусной мере:

1) $\arccos\frac{7}{25}+\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}$; 2) $\arccos\frac{15}{17}+\operatorname{arc\,ctg}\frac{4}{3}$;

3) $\arcsin\frac{12}{13}+\arccos\frac{8}{17}$.

276. Решить уравнение:

$$\cos 2x\cdot\cos x=\sin 2x\cdot\sin x.$$

277. Почему формулы

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

верны при любых значениях α и β?

278. Найти $\sin 75°$, представив $75°$ как сумму $30°+45°$.

279. а) Найти $\sin(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{8}{17}$ и оба угла (α и β) одной и той же четверти.

б) Найти $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\cos\beta=-\frac{8}{17}$.

280. Найти $\sin(45°-\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}75$ при $90°<\alpha<180°$.

281. Доказать, что при любом значении α справедливо равенство

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

282. Вычислить: 1) $\sin\left[\arcsin 0{,}6+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$;

2) $\sin\left(\arccos\frac{5}{13}-\operatorname{arc\,ctg}\frac{4}{3}\right)$.

283. Выполнить действия (см. № 274):

1) $\operatorname{arc\,tg}2{,}4-\arccos\frac{3}{5}$; 2) $\operatorname{arc\,ctg}0{,}75+\operatorname{ars\,sin}\left(-\frac{15}{17}\right)$.

284. Решить уравнение:

$$\sin 3x \cdot \cos x = \cos 3x \cdot \sin x.$$

285. Следствием какой теоремы сложения аргументов являются формулы:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \text{ и } \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}.$$

286. Вычислить $\operatorname{tg} 105°$.

287. Вычислить $\operatorname{tg}(45° - \alpha)$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ при $90° < \alpha < 180°$.

288. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = a$.

289. Доказать, что при любом значении α, отличном от чисел вида $180° n$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$$

учитывая, что $\operatorname{tg} 90°$ не существует.

290. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\arcsin 0{,}6 - \operatorname{arc\,tg} 2{,}4)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4} + \operatorname{arc\,ctg}\frac{5}{12}\right)$.

291. Выполнить действия (см. № 274):

1) $\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12} - \operatorname{arc\,ctg}\frac{4}{3}$; 2) $\operatorname{arc\,ctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}$;

3) $\operatorname{arc\,ctg}\frac{8}{15} - \operatorname{arc\,tg}\frac{12}{5}$; 4) $\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3} - \operatorname{arc\,tg}(-2{,}4)$;

5) $\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3$.

292. (Предпочтительно устно.)

Упростить выражения:

1) $\cos\frac{3\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8} \cdot \sin\frac{\pi}{8}$;

2) $\sin 10° \cdot \cos 50° + \cos 10° \cdot \sin 50°$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha}$;

4) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 17^\circ \cdot \operatorname{tg} 77^\circ}{\operatorname{tg} 77^\circ - \operatorname{tg} 17^\circ}$;

5) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$;

6) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$;

7) $\dfrac{\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$;

8) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha \cdot \cos\beta}$;

9) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \cos\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \sin\alpha$;

10) $\cos(45^\circ + \alpha) \cdot \cos(15^\circ - \alpha) - \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \sin(15^\circ - \alpha)$;

11) $\sin(22^\circ{,}5 + \beta) \cdot \cos(22^\circ{,}5 - \beta) + \cos(22^\circ{,}5 + \beta) \cdot \sin(22^\circ{,}5 - \beta)$;

12) $\cos(36^\circ + z) \cdot \cos(24^\circ - z) - \sin(36^\circ + z) \cdot \sin(z - 24^\circ)$;

13) $\cos(27^\circ - \alpha) \cdot \cos(63^\circ - \alpha) - \sin(27^\circ - \alpha) \cdot \sin(63^\circ - \alpha)$;

14) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

15) $\cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha)$;

16) $\cos 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin 2\alpha$; 17) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$;

18) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha}$; 19) $\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}$;

20) $\sin\frac{4\pi}{11} \cdot \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{11} - \cos\frac{4\pi}{11}$.

293. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8} + \alpha\right) = 2$;

2) $\sin(55°-\beta)$, если $\cos(25°-\beta)=-\frac{7}{25}$

при $-125°<\beta<-100°$.

294. (Устно.)

Упростить.

1) $\sin 27°\cdot\cos 33°+\sin 63°\cdot\cos 57°+\cos 30°$;

2) $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{\pi}{7}$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$.

295. Доказать тождества [1), 2), 4), 5)—устно]:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; 2) $\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$;

3) $\frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta$;

4) $\operatorname{tg}(45°+\alpha)-\operatorname{tg}\alpha=1+\operatorname{tg}(45°+\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha$;

5) $\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}=\operatorname{tg}2\alpha$;

6) $\cos(\alpha+\gamma)\cdot\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta=$
$=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta-\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin\gamma$.

296. Доказать равенства:

1) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$, если $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$;

2) $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$, если $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$;

3) $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)=2$, если $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

297. Формулы, приведенные в задачах 272, 281 и 289, выражают зависимость между функциями дополнительных углов.

а) Можно ли под дополнительными углами понимать только два острых угла, составляющих в сумме $90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

Какое более общее определение дополнительных углов следует дать?

б) Найти другой дополнительный угол, если один из них равен:

1) $500°$; 2) $-186°$; 3) $\frac{13\pi}{7}$; 4) $-\frac{11\pi}{6}$; 5) $3720°$; 6) -4.

298. Доказать:

1) $\operatorname{arc\,ctg}\frac{12}{5} - \arcsin\left(-\frac{8}{17}\right) = \operatorname{arc\,ctg}\frac{140}{171}$;

2) $\arccos\frac{4}{5} + \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{5}{12}\right) = \operatorname{arc\,tg}\frac{16}{63}$;

3) $\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{5}{13} = \pi - \arccos\frac{16}{65}$;

4) $\arccos\frac{15}{17} - \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4} = -\arcsin\frac{13}{85}$.

299. Могут ли выражаться отрицательными числами $\cos(\arcsin m)$, $\cos(\operatorname{arc\,tg} m)$, $\sin(\arccos m)$, $\sin(\operatorname{arc\,tg} m)$, $\operatorname{tg}(\arccos m)$?

300. Доказать:

1) $\arcsin m + \arccos m = \frac{\pi}{2}$, если $0 \leqslant m \leqslant 1$;

2) $\operatorname{arc\,tg} m + \operatorname{arc\,ctg} m = \frac{\pi}{2}$, если $m > 0$.

301. (Устно.)

Определить разность:

1) $\frac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}3$; 2) $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{11}$; 3) $90° - \operatorname{arc\,tg} 3$;

4) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} k$ $(k > 0)$.

302. Исключить α из системы:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg}(22°{,}5 + \alpha) = a, \\ \operatorname{tg}(22°{,}5 - \alpha) = b, \\ \text{где } 0 < \alpha < 22°{,}5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = a, \\ \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = b. \end{cases}$

303. Доказать, что $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$, если α и β углы I четверти.

304. Выразить через тригонометрические функции углов α, β и γ следующие выражения: $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$; $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$.

305. Тангенсы трех острых углов — α, β и γ—соответственно равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$. Доказать, что сумма этих углов равна $\frac{\pi}{4}$.

306. $\alpha = \operatorname{arc\,ctg}\frac{3}{4}$, $\beta = \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{7}$; доказать, что

$$\alpha+\beta = \frac{3\pi}{4}.$$

307. Синусы двух острых углов треугольника соответственно равны $\frac{7}{25}$ и $\frac{4}{5}$. Доказать, что косинус внешнего угла треугольника, несмежного с двумя данными, равен 0, 352.

308. Доказать равенство:

$$\frac{\pi}{2} - \rho = \operatorname{arc\,ctg} k,$$

где ρ — угол трения и k — коэффициент трения (см. № 87).

309. Решить уравнения:

1) $\sin 3x \cdot \cos 2x = \cos 3x \cdot \sin 2x + 1$;

2) $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

3) $\cos(x+\alpha) + \sin\alpha \cdot \sin x = \cos\alpha$.

Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$ при $a \neq 0$ введением вспомогательного угла.

310. В выражении $a\sin x + b\cos x$ вынести за скобки множитель a, заменить множитель $\frac{b}{a}$ выражением $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)$ и, продолжая преобразования, показать, что

$$a\sin x + b\cos x = \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) \text{ при } a>0, \\ -\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) \text{ при } a<0. \end{cases}$$

Какой введен вспомогательный угол?

311. (Устно.)

Преобразовать введением вспомогательного угла следующие выражения:

1) $3\sin\alpha + 4\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha$;
3) $a\sin\alpha - \cos\alpha$ $(a > 0)$; 4) $\sin\alpha + k\cos\alpha$ $(k > 0)$;
5) $\sin\alpha - \cos\alpha$; 6) $\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$.

312. (Предпочтительно устно.)

Найти y_{max} и y_{min} следующих функций:

1) $y = 2\sin x + \cos x$; 2) $y = a\sin x + b\cos x$ $(a > 0)$;
3) $y = 2\sqrt{2}\cos x - \sin x$.

313. Решить уравнения:

1) $\sin x + \cos x = 1$; 2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$;
3) $2\sin x + 3\cos x = 0$; 4) $\sin x = \cos x$;
5) $a\sin x + b\cos x = c$ при $a > 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$;

установить соотношение между a, b и c, при которых уравнение имеет решение.

314. Найти наибольшее и наименьшее значение функций:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = |\sin x + \cos x|$

и соответствующие значения аргумента x.

315. Гипотенуза треугольника равна 20 *дм*. Может ли сумма катетов такого треугольника равняться 30 *дм*?

Указание. Выразить сумму катетов через гипотенузу (тригонометрически) и найти наибольшее значение этой суммы.

316. Найти наименьшее значение функции:

$$y = \frac{2 + \sqrt{3}\cos x}{\sqrt{3}\sin x}, \text{ если } 0 < x < \pi .$$

317. При равномерном поднятии тела весом в 150 *кг* по наклонной плоскости действующая на тело параллельно плоскости сила равнялась 100 *кг*. Определить угол подъема плоскости, если коэффициент трения равен 0,3 (см. № 87).

Указание. Если уравнение составлено по условию задачи, то для неизвестного следует установить допустимые значения (в данной задаче $0° \leqslant x \leqslant 90°$); затем по формулам общего решения найти частные значения, отобрав из них допустимые для неизвестного; только эти значения неизвестного и дают решение задачи.

318. В квадрат со стороной a вписан другой квадрат. Определить сторону вписанного квадрата, если она со стороной данного образует угол α.

При каком положении вершин вписанного квадрата на сторонах данного сторона вписанного квадрата будет наименьшей?

319. Через вершину прямого угла C треугольника ABC провести прямую так, чтобы сумма расстояний от вершин острых углов до прямой была наибольшей.

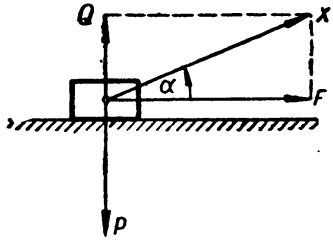
320. Найти наименьшее значение функции:

$$y = \frac{b(2 - \cos x)}{\sin x}$$

и соответствующее значение аргумента x при условии, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $b > 0$.

321. Тело весом P *кг* равномерно движется по горизонтальной поверхности под действием силы, направленной под углом α к горизонтали. Определить действующую силу, если коэффициент трения равен k. При каком значении α действующая сила будет наименьшей и чему она равна?

При каком значении α действующая сила будет наибольшей и чему она равна?



Черт. 28.

Указание. Исходное уравнение (черт. 28): $F = (P - Q)k$, и т. д.

§ 2. Формулы приведения

322. Почему формулы приведения тригонометрических функций от аргументов

$$\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \quad \pi \pm \alpha, \quad \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, \quad 2\pi \pm \alpha$$

к функциям от аргумента α верны для произвольных допустимых значений α?

323. (Устно.)

Привести к функциям положительного острого угла, сохранив название приводимой функции:

1) $\sin 290°$; 2) $\cos 200°$; 3) $\operatorname{tg}(-320°)$;
4) $\operatorname{ctg} 137°$; 5) $\operatorname{tg}(-213°)$; 6) $\sin(-96°)$;
7) $\operatorname{ctg}(-283°)$; 8) $\cos(-324°)$; 9) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{10}$;
10) $\cos\frac{13\pi}{8}$; 11) $\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$; 12) $\sin\left(-\frac{17\pi}{11}\right)$;
13) $\cos(-5{,}14)$; 14) $\sin 5$; 15) $\operatorname{ctg}(-4{,}85)$;
16) $\operatorname{tg} 1{,}63$.

324. (Устно.)

Следующие тригонометрические функции привести к сходным по названию функциям положительного острого угла:

1) $\operatorname{tg} 317°$; 2) $\operatorname{ctg}(-243°)$; 3) $\cos 111°$;
4) $\sin(-191°)$; 5) $\cos\frac{7\pi}{5}$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{16\pi}{9}\right)$;
7) $\sin\frac{10\pi}{7}$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{9}\right)$; 9) $\operatorname{ctg} 2{,}11$;
10) $\cos(-4)$; 11) $\sin 6$; 12) $\operatorname{tg}(-1{,}86)$.

325. Следующие тригонометрические функции привести к простейшему (наименьшему) положительному аргументу:

1) $\cos(-2000°)$; 2) $\sin 211°$; 3) $\operatorname{tg}(-643°)$;
4) $\operatorname{ctg} 1214°$; 5) $\sin\left(-\frac{27\pi}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\frac{18\pi}{7}$;
7) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{23\pi}{9}\right)$; 8) $\cos\frac{29\pi}{8}$; 9) $\operatorname{ctg} 8{,}11$;
10) $\cos(-13{,}2)$; 11) $\sin(-7{,}34)$; 12) $\operatorname{tg} 10{,}6$.

326. Применить формулы приведения к функциям:

1) $\operatorname{ctg}(\alpha - 5\pi)$; 2) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $\sin(\alpha - 90°)$;

4) $\operatorname{tg}(\alpha - 180°)$; 5) $\cos(\alpha - \pi)$; 6) $\sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$;

7) $|\operatorname{ctg}(270° + \alpha)|$; 8) $\operatorname{tg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

327. Вычислить при помощи таблиц (нечетные примеры) при помощи логарифмической линейки (четные примеры):

1) $\sin 837°$; 2) $|\operatorname{tg} 1200°|$; 3) $\operatorname{ctg}(-511°)$;

4) $\cos(-1600°)$; 5) $\operatorname{ctg}\frac{21\pi}{8}$; 6) $\sin\left(-\frac{13\pi}{5}\right)$;

7) $\cos\frac{29\pi}{8}$; 8) $\operatorname{tg}\left(-\frac{31\pi}{12}\right)$; 9) $\cos 16{,}3$;

10) $\operatorname{tg}(-8{,}14)$; 11) $|\sin(-9{,}23)|$; 12) $\operatorname{ctg} 11$.

328. Упростить следующие выражения:

1) $\sin(-523°)\cdot\cos(-287°) - \operatorname{ctg}(-296°)\cdot\operatorname{tg}(-604°)$;

2) $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}(-510°) - \cos(-570°) - \sin(-480°)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{13\pi}{8}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{21\pi}{8}\right) - \cos^2\left(-\frac{16\pi}{5}\right)$;

5) $\cos(-780°) + \operatorname{tg}(-585°) + \sin(-690°)$;

6) $\sin\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi}{5} + \alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{9\pi}{5} + \alpha\right) +$
$+ \operatorname{ctg}(\pi + \beta)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$;

7) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{7}\right)\times$
$\times\operatorname{cosec}\left(\frac{8\pi}{7} - \alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{23\pi}{14} - \alpha\right)$.

329. Доказать равенства:

1) $\cos(45° + \alpha) - \sin(45° - \alpha) = 0$;
2) $\cos(20° - x) + \sin(250° + x) = 0$;

3) $\sin(112° - \alpha) + \cos(\alpha + 158°) = 0$;

4) $\operatorname{tg}(113° + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(67° - \alpha) + \sin^2(26° + \alpha) + \sin^2(244° - \alpha) = 0$.

330. Сформулировать и доказать следующие равенства при условии что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$:

1) $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$; 2) $\cos\beta = -\cos(\alpha + \gamma)$;

3) $\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; 4) $\operatorname{ctg}\beta = -\operatorname{ctg}(\alpha + \gamma)$;

5) $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

331. Доказать, что площадь всякого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей, умноженной на синус угла между диагоналями, и показать, что можно брать любой из смежных углов, образованных диагоналями.

332. Доказать, что сторона треугольника равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего стороне угла треугольника (рассмотреть три случая).

333. Доказать (как следствие теоремы в задаче 331), что площадь всякого четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.

334. Доказать, что из всех прямоугольников с данной диагональю d наибольшую площадь имеет квадрат.

335. Меньшее основание равнобочной трапеции равно ее боковой стороне, отношение большего основания к меньшему равно $m:n$. Определить углы трапеции.

Указание. Как в данной задаче, так и в последующих задачах с параметрами надо проводить исследование условий существования решения.

336. Площадь четырехугольника равна S, его диагонали m и n; определить углы между диагоналями.

337. При каких значениях аргумента x не существует

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \qquad \operatorname{ctg}(x - 70°)?$$

338. Решить уравнения:

1) $\sin(x - \pi) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$;

2) $\cos(\pi + x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{ctg}(\pi - x)$;

4) $\sin^2(x - 270°) + 2\cos(360° - x) = 3$;

5) $\operatorname{tg}(x - 200°) = \operatorname{tg}(x - 20°)$;

6) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

§ 3. Формулы удвоения аргумента.

339. (Предпочтительно устно.)
Какой четверти может быть угол (дуга) 2α, если:

1) $\sin\alpha = 0{,}8$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}95$; 3) $\cos\alpha = 0{,}4$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$; 5) $\sin\alpha = 0{,}6$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}7$;
7) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}2$; 8) $\cos\alpha = 0{,}9$; 9) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}7$;
10) $\cos\alpha = -0{,}6$; 11) $\sin\alpha = -0{,}9$; 12) $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}8$.

340. Вычислить:

1) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

341. Вычислить:

1) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ при $180° < \alpha < 270°$;
2) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$;
3) $\sin(2 \arccos 0{,}6)$;
4) $\cos(2 \operatorname{arc\,tg} 2)$;
5) $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin\frac{5}{13}\right)$.

342. Вычислить $\cos(2\alpha - \beta)$ и $\sin(\alpha - 2\beta)$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $\cos\beta = -\frac{4}{5}$, причем α и β—углы треугольников и одной и той же четверти.

343. Синус угла при основании равнобедренного треугольника равен 0,6. Определить косинус угла при вершине треугольника.

344. Выразить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

1) через $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$; 2) только через $\sin\frac{\alpha}{2}$;

3) только через $\cos\frac{\alpha}{2}$.

345. Выразить $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

346. (Предпочтительно устно.)
Упростить выражения:

1) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$; 2) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

3) $4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha$; 4) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$;

5) $\frac{\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$; 6) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\cdot\sin 2\alpha$;

7) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 8) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$;

9) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 10) $\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1-\sin\alpha}$;

11) $\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; 12) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$;

13) $\frac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$; 14) $\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;

15) $1-2\sin^2 2\alpha$; 16) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

17) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

18) $\sin^2(\beta-45^\circ)-\cos^2(\beta-45^\circ)$;

19) $\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$;

20) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 21) $\cos^2\alpha - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

22) $\dfrac{2\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)}$.

347. Упростить выражения:

1) $\dfrac{\cos^2 2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$; 3) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$;

4) $1-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$; 5) $\dfrac{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)-1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)+1}$.

348. Доказать тождества:

1) $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

4) $\cos^3\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$;

5) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-6}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2} = \cos 4\alpha$;

6) $\sin 10^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ = \frac{1}{8}$;

7) $\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$;

8) $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}\sec\frac{\pi}{7}$;

9) $\sin 2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos 2\alpha$;

10) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

349. Найти наибольшее и наименьшее значения функций и соответствующие значения аргумента x:

1) $y = 3 - 4\sin x \cdot \cos x$; 2) $y = (\sin x + \cos x)^2$;

3) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; 4) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

350. Диагональ d прямоугольника образует с его стороной угол α. Найти площадь прямоугольника.

351. По площади S прямоугольного треугольника и острому углу α определить стороны треугольника.

352. Высота остроугольного равнобедренного треугольника равна h, угол при основании равен α. Определить отрезок боковой стороны между вершиной треугольника и основанием боковой высоты тремя способами:

1) по разности между боковой стороной и ее отрезком, прилегающим к основанию треугольника;

2) по боковой стороне и углу при вершине треугольника;

3) по теореме Пифагора через боковую сторону и боковую высоту.

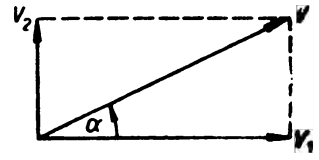
Доказать, что значение полученного для отрезка выражения положительно.

353. Доказать, что

1) $|\sin x \cdot \cos x| < 0{,}6$; 2) $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

354. Доказать, что из всех прямоугольных треугольников с высотой h, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу, наименьшую гипотенузу имеет равнобедренный.

355. Дискометатель выпустил диск со скоростью v *м/сек* (черт. 29) под углом α к горизонту. Определить дальность полета диска. Под каким углом к горизонту должен быть выпущен диск, чтобы при равных прочих условиях дальность полета была наибольшей?



Черт. 29.

С какой скоростью должен быть брошен диск под наивыгоднейшим углом к горизонту, чтобы дальность полета была равна 60 *м*?

356. Исключить угол α из системы равенств:

1) $\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = x, \\ \sin 2\alpha = y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin\alpha = x, \\ \cos 2\alpha = y. \end{cases}$

357. Решить уравнения:

1) $\sin x \cdot \cos x = 0{,}5$; 2) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$;

3) $\cos 2x = \cos x$; 4) $\cos 2x = 2\sin^2 x$.

358. Выразить:

1) $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$; $\operatorname{tg} 3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

359. Найти $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Выражение тригонометрических функций от α через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

360. Пользуясь формулами удвоения, показать, что $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ рационально (без радикалов) выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

361. Вычислить выражения:

1) $\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$; 2) $\frac{1-2\sin\alpha}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$.

362. Решить следующие уравнения, выразив входящие в них функции через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

1) $\sin x + \cos x = 1$; 2) $4\sin x + 3\cos x = 2$;

3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sqrt{3}$.

363. Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{2-\cos x}{\sin x} \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

и соответствующее значение аргумента двумя способами: 1) примененным в задаче 316, 2) решением уравнения приемом задачи 362.

364. При сооружении каналов в целях уменьшения стоимости выгодно уменьшать их поперечные размеры. Поперечные сечения каналов преимущественно имеют форму равнобочной трапеции; часть сечения по дну и стенкам канала, соприкасающаяся с водой, называется смоченным периметром.

Черт. 30.

Определить угол откоса канала (черт. 30), при котором смоченный периметр будет наименьшим при глубине живого сечения канала h и площади этого сечения S.

§ 4. Формулы деления аргумента

Преобразование выражений: $1 \pm \cos\alpha$ и $1 \pm \sin\alpha$.

365. Пользуясь формулами удвоения аргумента, доказать тождества:

1) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

3) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

4) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

366. (Устно.)

Упростить выражения:

1) $1 - \cos 40°$; 2) $1 - \sin 74°$; 3) $1 + \cos 0{,}22$;

4) $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$; 5) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha(1 + \cos 2\alpha)$;

7) $\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$; 8) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; 9) $\frac{1 + \sin\alpha}{2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$;

10) $\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$; 11) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$.

367. Доказать тождества:

1) $\frac{2\sin\beta - \sin 2\beta}{2\sin\beta + \sin 2\beta} = \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$; 2) $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \operatorname{tg}(45° + \beta)$; 4) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

5) $\frac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$; 6) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

368. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = 1,$$

пользуясь формулами удвоения аргумента и формулами задачи 365. Сопоставить с приемами решения этого уравнения в задачах 313 (1) и 362 (1).

369. Острый угол равнобочной трапеции, описанной около круга радиуса R, равен α. Определить стороны трапеции.

370. Решить уравнения:

1) $1 - \cos x = \sin \frac{x}{2}$; 2) $1 - \cos x = \sin x$;

3) $a(1 + \cos x) = b \cos \frac{x}{2}$; 4) $a(1 + \cos x) = b \sin x$.

Формулы деления аргумента.

371. Определить, какой четверти может быть угол (дуга) $\frac{\alpha}{2}$, если:

1) $\sin \alpha = 0{,}4$; 2) $\cos \alpha = -0{,}8$;

3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha = -0{,}9$.

372. Почему в формулах, выражающих $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ через $\cos \alpha$, перед корнем берется двойной знак ($\pm$)?

373. Вычислить:

1) $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -0{,}6$;

2) $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ и угол α — II четверти;

3) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ и $310° < \alpha < 350°$;

4) $\sin \alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ и $134° < 2\alpha < 260°$;

5) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$, если $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{4} < \frac{\pi}{2}$ и $\cos \alpha = \frac{1}{8}$;

6) $\sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4}\right)$; 7) $\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{12}{13}\right)$.

374. а) Пользуясь формулами удвоения аргумента и формулами задачи 365, доказать, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ рационально выражается через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

б) Выразить $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

375. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ по формулам задачи 374, если

1) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$.

376. Почему в формуле, выражающей $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, отсутствует двойной знак? Сколько значений должен иметь $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ при заданном значении $\cos\alpha$ или $\sin\alpha$?

§ 5. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

377. (Устно.)

Следующие выражения представить в виде суммы:

1) $2\sin 28^\circ \cdot \cos 10^\circ$; 2) $2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$;

3) $\cos 14^\circ \cdot \cos 52^\circ$; 4) $\sin 12^\circ \cdot \cos 26^\circ$;

5) $\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)$; 6) $\cos^2(x-\alpha)$;

7) $\sin 3 \cdot \cos 5$; 8) $\cos x \cdot \cos(x+4)$;

9) $\sin(x+a)\cdot\cos(a+b)$.

378. Представить в виде суммы выражения:

1) $4\sin 16^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \cos 20^\circ$; 2) $4\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha$;

3) $2\cos 14^\circ \cdot \sin 26^\circ \cdot \sin 40^\circ$; 4) $\sin 2\beta \cdot \sin 4\beta \cdot \sin 6\beta$.

379. Вычислить выражения:

1) $\sin 45^\circ \cdot \sin 15^\circ$; 2) $\sin\frac{\pi}{24}\cdot\sin\frac{5\pi}{24}$; 3) $\cos 75^\circ \cdot \cos 105^\circ$.

380. Доказать тождества:

1) $2\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha + \cos 3\alpha = \cos\alpha$;

2) $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{2}$.

381. Найти наибольшее и наименьшее значение функций:

1) $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$;

3) $y = \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x$;

4) $y = \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x$.

382. Решить уравнения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -0{,}5$;

2) $\sin x \cdot \sin 3x = 0{,}5$;

3) $\cos(\alpha + x) \cdot \cos(\alpha - x) + 0{,}75 = \cos^2 \alpha$;

4) $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x = \frac{3}{4}$.

383. В круг вписать равнобедренный треугольник, сумма основания и высоты которого — наибольшая из всех возможных.

§ 6. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

384. (Предпочтительно устно.)

Следующие выражения преобразовать в произведение и упростить:

1) $\sin 20° + \sin 40°$;

2) $\sin 15° + \sin 45°$;

3) $\cos 46° + \cos 74°$;

4) $\sin 0{,}2 - \sin 0{,}4$;

5) $\operatorname{tg} 16° + \operatorname{tg} 74°$;

6) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{7\pi}{10}$;

7) $\cos 86° - \sin 56°$;

8) $\operatorname{ctg} 18° - \operatorname{ctg} 48°$;

9) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{7} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$;

10) $1 + \operatorname{tg} 13°$;

11) $1 - \operatorname{ctg}\beta$;

12) $\cos\frac{7\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{9}$;

13) $\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1$;

14) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$;

15) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; 16) $\sin 3x+\cos x$.

385. Следующие выражения привести к простейшему логарифмическому виду:

1) $\sin^2 38°-\sin^2 14°$; 2) $\cos^2\alpha-\sin^2\frac{2\pi}{5}$;

3) $\sin^2 0{,}6-\cos^2\beta$; 4) $\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

5) $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)$;

6) $\sin 0{,}3\cdot\cos 0{,}3+\sin 0{,}5\cdot\cos 0{,}5$;

7) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$; 8) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$;

9) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$; 10) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$;

11) $1+\sin\alpha-\cos\alpha$; 12) $1+\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha$;

13) $1-\sin\alpha-\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$; 14) $\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$;

15) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta$; 16) $\sin\alpha+\sin 2\alpha-\sin 3\alpha$;

17) $1+2\sin\alpha$; 18) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$;

19) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha$; 20) $3-4\cos^2\alpha$;

21) $3-\operatorname{ctg}^2\alpha$; 22) $3\operatorname{tg}^2\alpha-1$;

23) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$; 24) $\cos\alpha+\sin 2\alpha-\cos 3\alpha$;

25) $1+\cos\alpha+\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)$.

386. Найти maximum и minimum функций:

1) $y=\sin\left(x+\frac{13\pi}{15}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$;

2) $y=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{9}\right)+\cos\left(2x+\frac{7\pi}{18}\right)$.

387. Доказать с применением тригонометрии теорему: «В треугольнике против большей стороны лежит и больший угол».

388. Периметр прямоугольного треугольника равен $2p$, а острый угол равен α. Определить стороны треугольника.

389. Решить уравнения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}$; 2) $\cos 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\cos 3x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$; 4) $\cos 3x=\sin 2x+\cos x$;

5) $\sin(x+\alpha)+\sin(x-\alpha)=\cos\alpha$.

Необходимое и достаточное условие равенства тригонометрических функций.

390. Теорема: «Для того чтобы выполнялось равенство

$$\cos\alpha=\cos\beta,$$

необходимо и достаточно, чтобы или сумма дуг α и β, или разность этих дуг равнялась числам вида $2k\pi$».

Доказательство этой теоремы можно выполнить так:

$$\cos\alpha=\cos\beta \rightleftarrows \cos\alpha-\cos\beta=0 \rightleftarrows 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=0 \rightleftarrows \left.\begin{matrix}\alpha+\beta=2k\pi\\ \alpha-\beta=2k\pi\end{matrix}\right\}.$$

Как видно ($\rightleftarrows$) из доказательства, следствием равенства $\cos\alpha=\cos\beta$ является равенство $\alpha\pm\beta=2k\pi$, которое поэтому и выражает необходимое условие выполнения исходного равенства косинусов дуг α и β; условие $\alpha\pm\beta=2k\pi$ является и достаточным для выполнения исходного равенства, являющегося в свою очередь следствием равенства $\alpha\pm\beta=2k\pi$; нужно ли доказывать последнее утверждение и почему?

391. В качестве следствия доказанной теоремы (№ 390) установить необходимое и достаточное условие выполнения каждого из следующих равенств:

1) $\cos\alpha=-\cos\beta$; 2) $\cos\alpha=\sin\beta$; 3) $\sin\alpha=\sin\beta$;

4) $\sin\alpha=-\sin\beta$; 5) $\sin\alpha=-\cos\beta$.

392. Для произвольной точки единичной окружности—

конца дуг α — показать соответствующую ей точку — конец дуг β — такую, чтобы выполнялись равенства:

1) $\alpha+\beta=2k\pi$ и $\alpha-\beta=2k\pi$ при условии $\cos\alpha=\cos\beta$;
2) $\alpha+\beta=\pi(2k+1)$ и $\alpha-\beta=2k\pi$ при условии $\sin\alpha=\sin\beta$.

393. Следующие уравнения решить, применяя теоремы о равенстве косинусов дуг (см. № 390) или о равенстве синусов дуг (см. № 391 (3)):

1) $\sin 5x=\sin 3x$;
2) $\cos 3x=\cos x$;
3) $\cos x=-\sin x$;
4) $\sin x=-\cos x$;
5) $\cos(x+\alpha)=\cos(x-\alpha)$;
6) $\sin 2x\cdot\cos x=\sin 3x\cdot\cos 2x$;
7) $\sin x\cdot\sin 3x=\sin 2x\cdot\sin 4x$;
8) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2x\cdot\cos x$;
9) $\cos x-\sin x=2\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x$;
10) $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(x+\alpha)$;
11) $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x-\frac{1}{2}\cos x$;
12) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}(\cos x-\sin x)$.

§ 7. Дополнительный к главе IV

394. Упростить следующие выражения:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\beta\cdot\cos\alpha-\cos\beta\cdot\sin\alpha}$;

4) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}2\alpha}{1-\operatorname{ctg}2\alpha}$;

5) $\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$;

6) $\sin 20^\circ+\sin 40^\circ-\sin 100^\circ$;

7) $\sin\frac{\pi}{18}+\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}$;

8) $\sin\frac{\pi}{18}+\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{7\pi}{18}$.

395. Доказать тождества:

1) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$;

3) $1+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\alpha}$;

4) $\frac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

5) $\frac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha-4+4\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$;

6) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+1}=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

7) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=2\operatorname{tg}\alpha$;

8) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha$;

9) $\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha$;

10) $\cos 43^\circ+\cos 29^\circ-\cos 79^\circ-\cos 65^\circ=\cos 7^\circ$;

11) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)+\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=$
$=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\beta-\gamma)$;

12) $\frac{\sin\alpha+\cos\beta}{\sin\beta-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

396. Доказать, что

1) $\dfrac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}=\dfrac{3}{2}$; 2) $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{18}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{18}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+$

$+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$.

397. Следующие тождества доказать при условии, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ (см. № 330).

1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

3) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

4) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=-1+4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

5) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$;

6) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma=1$;

7) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=1$;

8) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$;

9) $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$;

10) $\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=-1-4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

398. Упростить выражения:

1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ$.

399. Преобразовать в произведение:

1) $\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha-2\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\alpha$;

2) $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c-1+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c$.

400. Решить уравнения:

1) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$;

2) $\sin(x - 2\gamma) - \sin(x - 2\beta) = \sin(\beta - \gamma)$.

401. Найти наименьшее значение функции:

$$y = \frac{a \sin x + b^2 (\sqrt{2} + \cos x)}{b \sin x} \text{ при } a > 0,\ b > 0 \text{ и } 0 < x < \pi$$

и соответствующее значение аргумента x.

402. Доказать, что из всех прямоугольников с данной диагональю наибольший периметр имеет квадрат.

403. Установить необходимое и достаточное условие выполнения равенства:

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha + \beta).$$

404. а) Если α, β и γ — углы треугольника, то равенство $\sin\alpha = 2\sin\beta \cdot \cos\gamma$ выполняется только тогда, когда треугольник равнобедренный. Доказать.

Какое условие выполнения равенства задано в этой задаче — необходимое или достаточное?

б) Какое условие выполнения равенств задано в задаче 397 — необходимое или достаточное?

405. Если α, β и γ — острые углы, то равенство

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

выполняется только тогда, когда $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Доказать.

406. Доказать, что для выполнения равенства

$$\cos\alpha + \cos\beta = \sin\gamma,$$

где α, β и γ — углы треугольника, необходимо и достаточно, чтобы треугольник был прямоугольным.

407. Доказать, что и синус и косинус угла выражаются рациональными числами тогда и только тогда, когда тангенс половины угла — рациональное число (или не существует).

408. Доказать, что равенство

$$\sin\alpha = \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma}$$

выполняется в треугольнике тогда и только тогда, когда α, β и γ — углы прямоугольного треугольника.

409. Доказать, что равенство

$$\sin\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

выполняется в треугольнике в том и только в том случае, если α, β и γ — углы равнобедренного треугольника.

410. Доказать, что если α, β и γ — острые углы, то неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma<1$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$.

Глава V

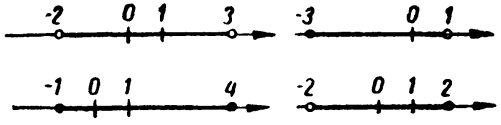
ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Тригонометрические функции числового аргумента и их области определения

Числовые промежутки.

411. Что называется интервалом? сегментом? полуинтервалом? полусегментом?

412. Назвать и записать числовые промежутки, изображенные на чертеже 31.



Черт. 31.

413. Назвать и показать на числовой оси следующие числовые промежутки:

1) $(-3;\ 2]$; 2) $[-2;\ 3]$; 3) $(-1;\ 4)$;
4) $[-4;\ 1)$; 5) $-5<x<0$; 6) $-1\leqslant x<4$;
7) $-3<x\leqslant 2$; 8) $-3\leqslant x\leqslant 3$.

414. Каким числовым промежутком является множество всех действительных чисел? Записать этот числовой промежуток.

415. Каким числовым промежутком является множество всех возможных значений тригонометрических функций:

1) $\sin x$; 2) $\operatorname{tg} x$; 3) $\operatorname{ctg} x$; 4) $\cos x$; 5) $\sec x$; 6) $\operatorname{cosec} x$?

Записать эти числовые промежутки.

Тригонометрические функции числового аргумента.

416. Что понимается в тригонометрии под словом угол (дуга)? (См. № 125.)

417. Любое действительное число изображается соответствующей точкой единичной окружности (см. № 147).

Что называется косинусом данного действительного числа? его синусом? его тангенсом? его котангенсом?

418. Какие соотношения имеют место между тригонометрическими функциями действительных чисел и тригонометрическими функциями углов (дуг)?

419. На сегменте $[-2;\ 2{,}5]$ найти все действительные числа (см. № 135), удовлетворяющие уравнению:

1) $\cos \pi x = 0$; 2) $\sin(\cos x) = 0$; 3) $\sin \pi x^2 = 0$;

4) $\sin \pi x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos \pi x - \sin \frac{\pi x}{2} = 0$;

6) $\cos 2\pi x = \cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Области определения тригонометрических функций.

420. Что называется областью определения функции?

421. Какой числовой промежуток является областью определения функции $\sin x$? $\cos x$?

Объяснить ответ на числовой (единичной) окружности и записать его.

422. Какое множество действительных чисел является областью определения функции $\operatorname{tg} x$? $\operatorname{ctg} x$?

Объяснить ответы на числовой окружности и записать их.

423. Установить область определения каждого из следующих тригонометрических выражений, рассматривая их как функции от аргумента x:

1) $\sin x + 2\cos x$; 2) $\frac{3+\sin x}{\cos x}$; 3) $\frac{2+3\cos x}{\sin x}$;

4) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$; 5) $\frac{\operatorname{tg} x - 2}{5}$; 6) $\frac{\operatorname{tg} x - 2}{\sin x}$;

7) $\operatorname{ctg} x - \cos x$; 8) $\sec x - \sin x$; 9) $\operatorname{cosec} x - \cos x$;

10) $\sec x + \operatorname{tg} x$; 11) $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$; 12) $\operatorname{cosec} x + \operatorname{tg} x$;

13) $\frac{2+\cos x}{1-\cos 2x}$; 14) $\frac{4}{\sin x+\cos x}$; 15) $\frac{\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$;

16) $\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; 17) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 18) $\operatorname{ctg} 3x$;

19) $\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} 2x}$; 20) $\sqrt{1-\cos x}$.

424. Принимая левую часть тождества за исходную, установить, как изменяется область определения в каждом из следующих тождественных преобразований:

1) $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$; 2) $\sec x \cdot \operatorname{ctg} x = \operatorname{cosec} x$;

3) $\sin x + \cos x = \cos x\,(\operatorname{tg} x + 1)$; 4) $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = \cos^2 x\,(1 + \operatorname{tg} x)$;

5) $\frac{1-\sin 2x}{\cos x-\sin x} = \cos x - \sin x$; 6) $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;

7) $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; 8) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$;

9) $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; 10) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$.

425. Установить область определения каждого из следующих уравнений (областью определения уравнения называется общая часть областей определения частей уравнения; область определения уравнения называют также множеством допустимых значений неизвестного):

1) $\sin x = \operatorname{tg} x$; 2) $\frac{\cos x}{1+\operatorname{tg} x} = 0$;

3) $\frac{1+\cos 2x}{\cos x} = 0$; 4) $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \sin\frac{x}{2}$;

5) $\frac{\sin x}{1-\cos x} = 2 - \operatorname{ctg} x$; 6) $\frac{1+\sin 2x}{\cos x+\sin x} = 0$;

7) $\frac{1-2\cos 2x}{\cos 2x-2}=0$; 8) $\frac{1-\sin^2 x}{\operatorname{tg} 2x}=\cos 2x$;

9) $\operatorname{tg}^2 3x=2\operatorname{tg} 3x$; 10) $\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x=1-\sin 2x$;

11) $\frac{\sin x+2\cos x}{\sin x-2\cos x}=3$; 12) $\sin 2x\cdot\operatorname{tg} x\cdot\sec x=0$;

13) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$.

Однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравнения.

426. Уравнение $\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x=0$ решить преобразованием его левой части в произведение посредством вынесения за скобки $\cos x$ или $\sin x$ в степени, равной степени уравнения.

427. Решить уравнения:

1) $2\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=0$;

2) $\sin^2 x=3\cos^2 x+\sin 2x$; 3) $2\cos^2 x+\sin 2x=2$;

4) $a\sin x+b\cos x=0$.

Способ замены $\sin x$ и $\cos x$ их выражениями через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

428. Следующие уравнения решить двумя приемами:
а) введением вспомогательного угла и
б) заменой $\sin x$ и $\cos x$ их выражениями через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (см. № 362):

1) $\sin x-\cos x=1$; 2) $2\sin x+3\cos x=4$;

3) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3}\cos 2x=2\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}$.

При каком из этих двух приемов может происходить потеря корней и почему?

429. Решить уравнения:

Посторонние корни.

1) $\frac{\sin x}{1-\cos x}=0$; 2) $\cos x\cdot\operatorname{tg} x=1$;

3) $\frac{\sin 2x}{\cos x}=0$; 4) $\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}=0$;

5) $\sin x + \cos x = \sec x - \operatorname{tg} x$; 6) $\operatorname{tg} x \cdot \sin x + 1 = \sin x + \operatorname{tg} x$;

7) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Равенство тангенсов двух аргументов.

430. Доказать теорему: «Чтобы выполнялось равенство $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, необходимо и достаточно, чтобы разность аргументов $\alpha - \beta$ равнялась числам вида $n\pi$».

421. Применяя теорему о равенстве тангенсов двух аргументов, решить уравнения:

1) $\operatorname{tg}(x - 20^\circ) = -\operatorname{tg}(x - 40^\circ)$; 2) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 0$;

3) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{ctg} x$.

§ 2. Периодичность тригонометрических функций

432. Какие функции называются периодическими?

433. Показать, что число 2π является общим периодом тригонометрических функций.

434. Доказать, что число 2π является наименьшим положительным периодом функций $\sin x$ и $\cos x$.

435. Доказать, что число π является наименьшим положительным периодом функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

436. Показать, что период функций $y = \sin(ax + b)$ или $y = \cos(ax + b)$ равен числу $\frac{2\pi}{|a|}$.

437. Показать, что период функции $y = \operatorname{tg}(ax + b)$ или $y = \operatorname{ctg}(ax + b)$ равен числу $\frac{\pi}{|a|}$.

438. Показать, что период функции $y = a$, где a—данное действительное число, есть произвольное число.

439. Найти период каждой из следующих функций, учитывая, что период суммы равен наименьшему кратному периодов слагаемых, если каждое слагаемое имеет период:

1) $f(x) = \sin 2x$; 2) $\varphi(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + 1\right)$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $\varphi(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - 3\right)$;

5) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$; 6) $\varphi(x) = 1 + \operatorname{tg}(x)$;

7) $f(x) = \cos x - \operatorname{ctg}\frac{x}{4}$; 8) $\varphi(x) = \sin 2x + 2\cos x$;

9) $f(x) = \frac{2 - 3\sin x}{5 + \cos 2x}$; 10) $\varphi(x) = \sin^2 x$;

11) $f(x) = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$; 12) $\varphi(x) = \operatorname{tg}^2 x$;

13) $y = \sin 2\pi x$; 14) $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$;

15) $\varphi(x) = \sin^3 x$; 16) $f(x) = \cos^3 x$;

17) $\varphi(x) = \sin^4 x$; 18) $f(x) = \cos^4 x$;

19) $\varphi(x) = 2\sin 4x - 3\sin 5x - \cos\left(\frac{x}{3} + 3\right)$;

20) $f(x) = \cos^2 4x$;

21) $\varphi(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

22) $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

23) $\varphi(x) = x + \sin x$.

440. Можно ли считать число 2π общим (не наименьшим) периодом частей уравнения:

1) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$; 2) $\cos 6x = \cos 4x$;

3) $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$; 4) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin\frac{x}{2}$;

5) $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{5}{2}$; 6) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin 3x$.

441. Какую более общую формулировку можно дать выражению: «Тригонометрические функции **действительного числа равны одноименным функциям угла (дуги), радианная мера которого (которой) равна данному действительному числу»?**

§ 3. Промежутки знакопостоянства и промежутки монотонности тригонометрических функций

442. На каком наименьшем промежутке значений аргумента следует установить какое-либо свойство данной тригонометрической функции, чтобы из множества всех действительных чисел выделить промежутки, на которых это свойство тригонометрической функции сохраняется?

443. $\cos x$ положителен в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (правая полуокружность) и отрицателен в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ (левая полуокружность). На каком основании делается заключение, что $\cos x$ положителен в каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ и отрицателен в каждом из интервалов $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$?

444. В каких интервалах $\sin x$ положителен? отрицателен?

445. На каком наименьшем промежутке достаточно установить интервалы знакопостоянства функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, чтобы из множества всех действительных чисел выделить промежутки знакопостоянства этих функций?

446. $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ положительны в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и отрицательны в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$; можно ли на основании этого утверждать, что интервалы $\left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, в которых обе функции положительны, и интервалы $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi\right)$, в которых обе функции отрицательны, исчерпывают множество всех действительных чисел, тангенсы и котангенсы которых или положительны, или отрицательны?

447. Как изменяется абсцисса точки числовой окружности при движении точки в положительном направлении на сегменте $[0, \pi]$? на сегменте $[-\pi, 0]$?

На каких числовых промежутках $\cos x$ убывает? возрастает?

448. Как изменяется ордината точки числовой окружности при движении точки на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$? на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$?

На каких числовых промежутках $\sin x$ возрастает? убывает?

449. Как изменяется ордината центральной проекции точки числовой окружности на ось тангенсов при движении точки на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$? как изменяется $\operatorname{tg} x$ в этом интервале?

Существуют ли в множестве всех действительных чисел интервалы, в которых $\operatorname{tg} x$ убывает и почему?

450. Как изменяется абсцисса центральной проекции точки числовой окружности на ось котангенсов при движении точки на интервале $(0, \pi)$? Как изменяется $\operatorname{ctg} x$ в этом интервале?

Существуют ли в множестве всех действительных чисел интервалы, в которых $\operatorname{ctg} x$ возрастает и почему?

451. Решить неравенства:

1) $\operatorname{tg} x > 1$; 2) $|\operatorname{tg} x| < 1$; 3) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

452. Установить область определения каждой из следующих функций:

1) $f(x) = \sqrt{\sin x}$;
2) $\varphi(x) = \lg \sin x$;
3) $f(x) = \sqrt{\lg \sin x}$;
4) $\varphi(x) = \frac{a}{\sqrt{\sin x}}$;
5) $f(x) = \lg(1 + \cos x)$;
6) $\varphi(x) = \sqrt{1 - \cos x}$;
7) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;
8) $\varphi(x) = \lg \operatorname{ctg} x$;
9) $f(x) = \frac{a}{\lg \cos x}$;
10) $\varphi(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$;
11) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}$.

453. Упростить выражения:

1) $\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha + \sec^2\alpha}$; 2) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$.

§ 4. Графики тригонометрических функций

Синусоида обыкновенная.

454. а) Построить график функции $y = \sin x$ на миллиметровой бумаге при помощи лекала на сегменте $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, приняв за единицу масштаба отрезок в 10 *см*; предварительно составить таблицу значений синуса чисел $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{12}$ с точностью до 0,01.

б) построить синусоиду геометрически на сегменте $[-\pi, 2\pi]$, разделив каждую четверть числовой окружности на 6 равных дуг.

455. По графику задачи 454 (а) найти с точностью до 0,01: а) значение $\sin x$, если x равно:

1) 0,3; 2) 1; 3) 0,63; 4) 1,45.

б) 1) $\arcsin 0{,}24$; 2) $\arcsin 0{,}51$; 3) $\arcsin 1{,}2$; 4) $\arcsin 0{,}86$.

456. По графику задачи 454 (б) показать:

1) один из способов преобразования числовой окружности в числовую ось OX;

2) что синусоида симметрична относительно прямой, параллельной оси OY и проходящей через точку $\frac{\pi}{2}$ оси OX;

3) что синусоида центрально симметрична относительно начала координат;

4) как можно использовать центральную и осевую симметрию синусоиды при ее построении.

457. Построить схематически синусоиду на сегменте $[-2\pi, 3\pi]$ следующим образом. На оси OX отметить точки $\frac{n\pi}{2}$; сохраняя масштаб $\left(\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57\right)$, через точки $+1$ и -1 оси OY провести (пунктиром) прямые, параллельные оси OX; отметить точки синусоиды, соответствующие точкам $\frac{n\pi}{2}$ на оси OX, по их ординатам; от руки вычертить синусоиду.

458. По схематическому графику предыдущей задачи выполнить следующие упражнения:

1) Показать на оси OX: четверти числовой окружности; отрезки, соответствующие левой полуокружности, правой полуокружности, верхней полуокружности, нижней полуокружности.

2) Определить, какой четверти число $\frac{x}{2}$, если $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (при четном k и при нечетном k).

3) Объяснить, что любому действительному числу соответствует единственное значение его синуса.

4) Показать:

а) что период синуса равен 2π;

б) на сегменте $[0, 2\pi]$ интервалы знакопостоянства функции $\sin x$; интервалы, в которых синус отрицателен;

в) на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ промежутки монотонности синуса; промежутки, на которых $\sin x$ возрастает, на которых убывает;

г) интервалы, на которых $\sin x > \frac{1}{2}$, на которых $|\sin x| < \frac{1}{2}$;

д) какие точки оси OX являются центрами симметрии синусоиды;

е) через какие точки оси OX можно проводить параллельные оси OY прямые, каждая из которых является осью симметрии синусоиды.

5) Определить знак $\sin\frac{11\pi}{6}$; $\sin 200°$; $\sin(-200°)$; $\sin(-4)$; $\sin 7$.

6) Установить, что больше:

а) $\sin\frac{4\pi}{3}$ или $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; б) $\sin 100°$ или $\sin(-160°)$;

в) $\sin 200°$ или $\sin(-300°)$; г) $\sin(-4)$ или $\sin 4$.

Смещенная и деформированная синусоида.

459. График функции вида $y = \sin x + c$. Построить на сегменте $[0, 2\pi]$ схематически графики функций: $y = \sin x$; $y = \sin x + 2$; $y = \sin x - 1$. Все три графика можно построить на одном чертеже.

Сопоставлением трех полученных графиков установить, как изменяется положение обыкновенной синусоиды относительно осей координат при $c > 0$ и при $c < 0$.

460. График функции вида $y = A \sin x$.

На сегменте $[0, 2\pi]$ построить схематически графики функций: $y = 2 \sin x$; $y = -\frac{1}{2} \sin x$. (Сохранить масштаб графика задачи 459.)

Сопоставлением полученных графиков с обыкновенной синусоидой (задача 459) установить, какое изменение претерпевает синусоида при $|A| > 1$, $|A| < 1$ и $A < 0$.

461. График функции вида $y = \sin(x + b)$.

Построить схематически графики функций: $y = \sin(x + 2)$; $y = \sin(x - 1)$. Как изменяется положение обыкновенной синусоиды при $b > 0$ и при $b < 0$?

Указание. Как в данной задаче, так и в последующих (462, 463) для отметки на оси OX точек x, для которых ординаты соответствующих точек синусоиды последовательно принимают значения: 0; 1; 0; -1; 0, можно пользоваться таблицей, например, такой (для функции $y = \sin(x + 2)$:

$x + 2$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	-2	$\frac{\pi}{2} - 2$	$\pi - 2$	$\frac{3\pi}{2} - 2$	$2\pi - 2$
y	0	1	0	-1	0

откуда видно, что на оси OX следует намечать точки $\frac{n\pi}{2} - 2$.

462. График функции вида $y = \sin ax$.

Построить схематически графики функций: $y = \sin 2x$, $y = \sin \frac{x}{2}$. Какое изменение претерпевает обыкновенная синусоида при $a > 1$ и при $a < 1$?

Какую связь имеет рассматриваемая деформация обыкновенной синусоиды с периодом функции?

463. График функции вида $y = \sin(ax + b) = \sin a\left(x + \frac{b}{a}\right)$.

Построить схематически графики функций: $y = \sin(2x + 1)$; $y = \sin(2x - 2)$.

Как параметры a и b совместно влияют на смещение синусоиды относительно осей координат?

464. Функции вида $y = A\sin(ax + b)$ называются синусоидальными, их графиками являются синусоиды.

Объяснить, каким изменениям надо подвергнуть обыкновенную синусоиду (сдвиг, деформация), чтобы получить график каждой из следующих синусоидальных функций:

1) $y = 3\sin 2x$; 2) $y = \sin(3x + 6)$; 3) $y = 2\sin(x - 3)$.

465. Построить схематически график функции $y = 3\sin(2x - 2)$ и по графику исследовать функцию, т. е. указать: 1) область определения; 2) период функции; 3) интервалы знакопостоянства; 4) промежутки монотонности; 5) maximum и minimum функции.

466. Показать, что функция $y = a\sin x + b\cos x$ — синусоидальная.

467. Построить схематически график функции $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ и исследовать эту функцию по ее графику (см. № 465).

Косинусоида.

468. Представить функцию $y = \cos x$ в виде синусоидальной функции и объяснить, каким преобразованием обыкновенной синусоиды получается график функции $\cos x$ — косинусоида.

469. Построить схематически график функции $y = \cos x$ на сегменте $[-2\pi, 2\pi]$. Пользуясь графиком, выполнить следующие упражнения:

1) Показать, что любому действительному числу соответствует единственное значение косинуса.

2) Указать свойство графика, которое является признаком всякой четной функции; объяснить это свойство функции.

3) Исследовать функцию (см. № 465).

4) Решить неравенства: $\cos x < \frac{1}{2}$; $|\cos x| > \frac{1}{2}$.

5) Определить знак: $\cos 100°$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; $\cos 200°$; $\cos\frac{11\pi}{6}$.

6) Показать на графике: $\arccos 0{,}7$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\arccos 0{,}3$; $\arccos(-1)$.

Тангенсоида.

470. На миллиметровой бумаге при помощи лекала построить в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ график функции $y = \operatorname{tg} x$, приняв за единицу масштаба отрезок в 5 *см*. Предварительно составить таблицу значений (с точностью до 0,01) тангенса чисел:

$$\frac{\pi}{12}, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{12}.$$

Найти по графику (с точностью до 0,01) значения:

1) $\operatorname{tg} 0{,}43$; 2) $\operatorname{tg}(-1{,}17)$; 3) $\operatorname{tg} 1{,}7$; 4) $\operatorname{tg}(-2)$; 5) $\operatorname{tg} 0{,}84$; 6) $\operatorname{arc\,tg}(-2)$; 7) $\operatorname{arc\,tg} 4$; 8) $\operatorname{arc\,tg}(-1{,}62)$.

471. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ построить тангенсоиду геометрически, разделив правую полуокружность числовой окружности на 12 равных дуг. По графику показать, что тангенсоида центрально симметрична относительно начала координат (признак нечетной функции).

472. В интервале $\left(-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ построить тангенсоиду (схематически) следующим образом. Наметить на оси OX точки $\frac{n\pi}{2}$ и в том же масштабе на оси OY точки $+1$ и -1, через которые провести прямые, параллельные оси OX; через точки $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ оси OX провести прямые, параллельные оси OY; наметить точки тангенсоиды, соответствующие точкам $n\pi$ и точкам $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ на оси OX, от руки вычертить тангенсоиду. Пользуясь графиком, выполнить следующие упражнения:

1) Показать интервалы, в которых значения функции положительны, отрицательны.

2) Показать на оси OX центры симметрии тангенсоиды.

3) Решить неравенства: $\operatorname{tg} x > -1$; $|\operatorname{tg} x| < 1$.

4) Определить знак каждой из разностей:

$\operatorname{tg} 200^\circ - \operatorname{tg} 370^\circ$; $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} - \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right) - \operatorname{tg}\frac{19\pi}{10}$.

Котангенсоида.

473. В интервале $(-2\pi, 2\pi)$ построить котангенсоиду (схематически). Пользуясь графиком, выполнить упражнения:

1) Показать, что котангенсоида центрально симметрична относительно начала координат.

2) Показать интервалы, в которых значения функции положительны, отрицательны.

3) Решить неравенства: $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$; $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}^2 x > 1$.

4) Показать на графике: arc ctg 2; arc ctg $(-1{,}5)$; arc ctg 0,3; arc ctg (-4).

§ 5. Дополнительный к главе V

474. Построить (схематически) графики следующих функций и по графикам исследовать каждую из них:

1) $y = |\sin x|$; 2) $y = \sin |x|$; 3) $y = \sec x$; 4) $y = \operatorname{cosec} x$;

5) $y = |\cos x|$; 6) $y = |\operatorname{tg} x|$; 7) $y = \sin(\cos x)$;

8) $y = \cos(\sin x)$.

475. Установить, какие из следующих функций являются периодическими, четными, нечетными:

1) $y = 2\operatorname{tg} x$; 2) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; 3) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

4) $y = x + \operatorname{ctg} x$; 5) $y = \operatorname{tg} x + 1$; 6) $y = \cos 2x$.

476. Упростить следующие выражения при условии, что $2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$:

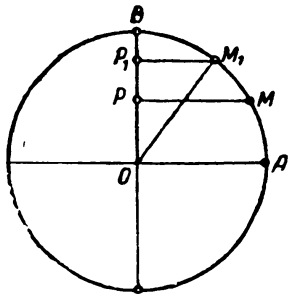
1) $\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}$; 2) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

477. Решить уравнение с точностью до 0,01:

$$\sin x + 2x = 1.$$

Простое гармоническое колебание. Пусть (черт. 32) точка M, равномерно двигаясь по окружности радиуса R ($OA = R$) в положительном направлении, опишет полную окружность. За то же время ее проекции на вертикальный диаметр—точка P—пройдет путь от исходного положения до конца B диаметра, затем в про-

тивоположном направлении путь до нижнего конца диаметра (B_1) и, наконец, в первоначальном направлении вернется в исходное положение. Говорят, что точка P совершила одно полное колебание.



Черт. 32.

Движение точки P по вертикальному диаметру называют простым гармоническим колебанием; это движение не будет равномерным, и расстояние y от точки P до середины диаметра (O) в любой данный момент времени определяется особым законом, называемым синусоидальным.

Пусть дуга AM измеряется (в радианах) числом φ_0, скорость движения точки по окружности равна $\omega \frac{1}{\text{сек.}}$, время движения от точки M до точки M_1 равно t сек.; тогда дуга AM_1 будет измеряться числом $\omega t + \varphi_0$, а расстояние OP_1 (из $\triangle OP_1M_1$) будет равно $OP_1 = R \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Постоянная величина R выражает наибольшее отклонение колеблющейся точки от середины отрезка и называется амплитудой колебания.

Период T полученной синусоидальной функции называется периодом колебания; он равен числу $\frac{2\pi}{\omega}$ $\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ и выражает время, за которое точка совершает одно полное колебание. Число n, обратное числу T $\left(n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\right)$, называется частотой колебания и выражает число полных колебаний за 1 сек.

Переменная величина $\varphi = \omega t + \varphi_0$ называется переменной фазой колеблющейся точки, а значение этой величины при $t = 0$, равное φ_0, называют начальной фазой.

В более общем случае, когда изменение какой-либо величины (например, сила переменного тока) происходит по закону простого гармонического колебания, этот закон выражается уравнением (см. № 464): $y = A\sin(at + b)$, где A, a и b — действительные числа, характеризующие постоянные величины, а t — переменная величина (время) — является аргументом синусоидальной тригонометрической функции. В этом уравнении число A называется амплитудой колебания и выражает наибольшее отклонение колеблющейся величины от нуля, а число a называют частотой колебания, понимая под частотой число полных колебаний за 2π секунд (или других единиц времени). По-прежнему:

$$T = \frac{2\pi}{a}; \quad n = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi}; \quad \varphi = at + b; \quad \varphi_0 = b.$$

478. Определить амплитуду, период, частоту и начальную фазу простого гармонического колебания, заданного уравнением:

$$1)\ y = \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{5}\right);\ 2)\ y = 2\sin 3t;\ 3)\ y = 3\sin\left(5t + \frac{\pi}{6}\right);$$

4) $y = \sin(314t - 3)$; 5) $y = 10\sin\left(\frac{t}{2} + 10\right)$.

479. Точка P совершает простое гармоническое колебание вдоль отрезка BB_1, равного 20 *см*; расстояние BB_1 точка проходит за 6 сек. Свое движение точка начала от середины отрезка в направлении к его концу B_1. Написать уравнение колебания точки и определить, на каком расстоянии от середины отрезка будет находиться точка через: 1) 1 сек.; 2) 3 сек.; 3) 10 сек.; 4) 30 сек.

Глава VI

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Таблицы квадратов и кубов.

480. Найти по таблицам:

1) $\operatorname{tg}^2 70°$; 2) $\operatorname{ctg}^2 27°42'$; 3) $\sin^2 74°12'$; 4) $\cos^2 21°15'$; 5) $\sin^2 37°17'$; 6) $\operatorname{tg}^2 86°53'$; 7) $\cos^2 62°40'$; 8) $\cos^3 23°28'$; 9) $\operatorname{tg}^3 5°10'$; 10) $\sin^3 74°35'$; 11) $\operatorname{ctg}^3 2°47'$; 12) $\operatorname{tg}^3 65°53'$; 13) $\cos^3 81°41'$; 14) $\operatorname{ctg}^3 14°28'$; 15) $\sin^3 12°11'$.

481. Найти острый угол, если:

1) $\sin^2 \alpha = 0{,}1621$; 2) $\operatorname{tg}^2 \alpha = 0{,}002107$;
3) $\operatorname{ctg}^3 x = 12{,}69$; 4) $\cos^3 z = 0{,}4417$;
5) $\operatorname{tg}^2 \gamma = 209{,}1$; 6) $\cos^2 \beta = 0{,}003636$;
7) $\sin^2 x = 0{,}08123$; 8) $\operatorname{ctg}^2 \varphi = 0{,}1744$;
9) $\cos^2 \gamma = 0{,}1142$; 10) $\sin^2 \beta = 0{,}3886$;
11) $\operatorname{ctg}^2 a = 2{,}196$; 12) $\operatorname{tg}^2 z = 0{,}1321$.

Логарифмическая линейка.

482. Найти при помощи логарифмической линейки:

1) $\sin^2 3°16'$; 2) $\operatorname{ctg}^3 86°14'$; 3) $\cos^3 67°20'$; 4) $\operatorname{tg}^2 31°20'$; 5) $\cos^2 27°10'$; 6) $\sin^3 69°32'$; 7) $\operatorname{tg}^2 3°47'$; 8) $\operatorname{ctg}^2 16°28'$; 9) $\operatorname{ctg}^3 5°47'$; 10) $\operatorname{tg}^3 74°26'$; 11) $\sin^2 38°40'$; 12) $\cos^3 86°14'$; 13) $\operatorname{tg}^3 85°27'$; 14) $\cos^2 47°34'$; 15) $\operatorname{ctg}^2 38°44'$; 16) $\sin^3 23°16'$.

483. Найти острый угол, если:

1) $\sin^2\beta = 0{,}634$;	2) $\sin^2 x = 0{,}136$;
3) $\cos^2\alpha = 0{,}813$;	4) $\operatorname{ctg}^2\gamma = 0{,}309$;
5) $\cos^2 x = 0{,}144$;	6) $\operatorname{tg}^2\alpha = 29{,}8$;
7) $\sin^2\beta = 0{,}0636$;	8) $\operatorname{ctg}^2\varphi = 44{,}0$;
9) $\sin^2\varphi = 0{,}0222$;	10) $\operatorname{ctg}^2 z = 0{,}00262$;
11) $\operatorname{tg}^2 y = 0{,}000475$;	12) $\cos^2\gamma = 0{,}830$;
13) $\operatorname{tg}^2 z = 0{,}530$;	14) $\operatorname{ctg}^2 x = 0{,}1264$;
15) $\cos^3 x = 0{,}00312$;	16) $\sin^2 y = 0{,}0419$.

484. (Устно.)

Таблица логарифмов.

а) Как (и почему) изменяется с увеличением острого угла α:

1) $\lg\sin\alpha$; 2) $\lg\cos\alpha$; 3) $\lg\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\lg\operatorname{ctg}\alpha$?

б) Как (и почему) изменяются логарифмы тех же тригонометрических функций с уменьшением угла?

Истолковать ответ графически (на графиках логарифмической и соответствующей тригонометрической функций).

485. Можно ли утверждать, что:

а) десятичный логарифм синуса любого действительного числа есть неположительное число?

б) логарифм котангенса любого действительного числа, исключая числа вида $n\pi$, есть некоторое действительное число?

486. Найти по таблице логарифмов:

а)	1) $\lg\sin 13°\,34'$;	2) $\lg\sin 5°\,47'$;	3) $\lg\sin 64°\,18'$;
	4) $\lg\sin 41°\,50'$;	5) $\lg\sin 0°\,34'$;	6) $\lg\sin 78°\,28'$;
	7) $\lg\sin 152°\,13'$;	8) $\lg\sin 0{,}0528$;	9) $\lg\sin 0{,}3\pi$;
	10) $\lg\sin\frac{5\pi}{4}$;	11) $\lg\sin 1{,}0846$;	12) $\lg\sin^2 56°\,20'$.
б)	1) $\lg\cos 48°\,36'$;	2) $\lg\cos 87°\,12'$;	3) $\lg\cos 84°\,17'$;
	4) $\lg\cos 46°40'$;	5) $\lg\cos 10°\,14'$;	6) $\lg\cos 58°\,25'$;
	7) $\lg\cos 1{,}2046$;	8) $\lg\cos 2$;	9) $\lg\cos\frac{5\pi}{12}$;
	10) $\lg\cos 328°\,20'$;	11) $\lg\cos^2 50°\,11'$;	12) $\lg^2\cos 100°\,40'$.

в) 1) $\lg \operatorname{tg} 3° 27'$; 2) $\lg \operatorname{tg} 43° 54'$; 3) $\lg \operatorname{tg} 5° 42'$;
4) $\lg \operatorname{tg} 74° 20'$; 5) $\lg \operatorname{tg} 27° 47'$; 6) $\lg \operatorname{tg} 0° 39'$;
7) $\lg \operatorname{tg} 160° 40'$; 8) $\lg \operatorname{tg} 0{,}4863$; 9) $\lg \operatorname{tg} 13{,}3\pi$;
10) $\lg \operatorname{tg} \frac{7\pi}{24}$; 11) $\lg \operatorname{tg}^2 61° 40'$; 12) $\lg \operatorname{tg}^3 34° 37'$.

г) 1) $\lg \operatorname{ctg} 21° 18'$; 2) $\lg \operatorname{ctg} 64° 51'$; 3) $\lg \operatorname{ctg} 84° 16'$;
4) $\lg \operatorname{ctg} 89° 29'$; 5) $\lg \operatorname{ctg} 42° 17'$; 6) $\lg \operatorname{ctg} 18° 44'$;
7) $\lg \operatorname{ctg} 0{,}4733$; 8) $\lg \operatorname{ctg} \pi$; 9) $\lg \operatorname{ctg}^2 3{,}547$;
10) $\lg \operatorname{ctg}^3 70° 05'$.

487. Логарифмы каких тригонометрических функций могут выражаться числами:

1) 0,7834; 2) $\bar{1}{,}038$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-2{,}2912$; 5) 0,0002;
6) 0,0000?

488. Найти острый угол x, если

а) $\lg \sin x$ равен: 1) $\bar{1}{,}8297$; 2) $\bar{1}{,}0021$; 3) $\bar{1}{,}6524$;
4) 0,7982; 5) $\bar{3}{,}9561$; 6) $\bar{1}{,}9778$;

б) $\lg \cos x$ равен: 1) $\bar{1}{,}9785$; 2) $\bar{1}{,}8434$; 3) $\bar{2}{,}0326$;
4) $\bar{1}{,}9560$; 5) 0,6180; 6) $\bar{1}{,}3049$.

в) $\lg \operatorname{tg} x$ равен: 1) 0,6954; 2) $\bar{1}{,}7517$; 3) $\bar{2}{,}9979$;
4) $\bar{1}{,}9236$; 5) 1,2003; 6) 0,1628.

г) $\lg \operatorname{ctg} x$ равен: 1) $\bar{1}{,}3676$; 2) 0,5260; 3) $\bar{1}{,}4350$;
4) $\bar{2}{,}0130$; 5) 2,1150; 6) $\bar{1}{,}5778$.

489. Каждое из следующих выражений вычислить тремя способами: а) при помощи таблиц, исключая таблицы логарифмов; б) при помощи таблиц логарифмов; в) при помощи логарифмической линейки.

1) $\arcsin \frac{\cos \varphi}{2}$, где $\varphi = 43° 24'$;

2) $\arccos \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\pi}{n}}$, где $n = 5$ и $\alpha = 54° 26'$;

3) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\cos^2\frac{x}{2}\right)$, где $x = 64°17'$;

4) $\arccos\left(-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{3}}{\sqrt{2}}\right)$, где $\varphi = 71°46'$;

5) $\sqrt[3]{\cos\frac{7\pi}{12}}$;

6) $\operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{2}\cdot 0{,}6\cos\varphi)$, где $\varphi = 72°16'$.

490. Каждое из следующих выражений вычислить при помощи таблиц логарифмов:

1) $S = \frac{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\varphi}$, где $a = 12{,}0$ *дм*, $\alpha = 34°42'$, $\varphi = 50°17'$;

2) $S = \frac{\sqrt{8}\,a^2\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\beta}$, если $a = 3{,}60$, $\alpha = 26°43'$, $\beta = 72°26'$;

3) $V = \frac{2\pi l^3\sin 2\beta\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{3\sin\alpha}$ при $l = 0{,}840$, $\alpha = 73°16'$, $\beta = 50°24'$;

4) $V = \frac{27r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}}{4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}$, где $r = 7{,}43$ и $\alpha = 62°54'$;

5) $S = \frac{3}{2}a^2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, где $x = 2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$, $a = 18{,}0$ и $\varphi = 140°$.

6) $V = \frac{\sqrt{3}\,\pi a^3}{16}\operatorname{tg}x$, где

$x = \operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$, $a = 5{,}18$ и $\alpha = 105°38'$.

491. Каждое из следующих выражений вычислить двумя способами: а) сначала при помощи таблиц, исключая таблицы логарифмов, найти значения сумм и подставить их в данное выражение, далее вычислять при помощи таблиц логарифмов;

б) все вычисления выполнить при помощи логарифмической линейки (в качестве *контрольного* вычисления).

1) $S = \dfrac{\sqrt{5}\,\pi Q \sin(\alpha + \operatorname{arc\,ctg} 2)}{2 \sin \alpha}$, где $Q = 42{,}4$ и $\alpha = 47^\circ 35'$.

2) $S = \dfrac{\pi m^2 (1 + \sin \alpha)}{2 \sin^2 \left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)}$ при $m = 3{,}50$ и $\alpha = 64^\circ 17'$.

3) $V = \dfrac{2\pi R^3 (4 - \sin^2 \alpha)}{3 \sin^2 \alpha}$, если $R = 0{,}832$ и $\alpha = 37^\circ 29'$.

4) $V = \sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^2} \cdot d^3 \cos \dfrac{\alpha}{2} \sin \left(\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2}\right)$,

где $d = 64{,}8$ и $\alpha = 63^\circ 20'$.

Глава VII

РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема синусов.

492. Зная, что площадь треугольника равна половине произведения двух сторон треугольника на синус угла, заключенного между этими сторонами, доказать теорему синусов.

493. Решить треугольник, если даны сторона и два угла:

1) $b = 13$; $A = 51°$; $C = 58°$;

2) $a = 48{,}8$; $B = 106°$; $C = 25° 20'$;

3) $c = 15{,}94$; $A = 51° 38'$; $B = 18° 19'$;

4) $b = 81{,}0$; $B = 43°{,}44'$; $C = 75° 03'$.

Указание. В данной задаче и в задачах 494, 499 и 500 выполнить контрольную проверку. Обозначения: a, b и c — стороны треугольника; A, B и C — соответственно противолежащие сторонам углы, S — площадь треугольника.

494. Решить треугольник, если даны две стороны и угол, противолежащий одной из них:

1) $a = 10$; $b = 8$; $A = 48°$;

2) $a = 13{,}81$; $c = 8{,}14$; $C = 13° 36'$;

3) $a = 24$; $b = 83$; $A = 26° 50'$;

4) $a = 19{,}0$; $b = 28{,}2$; $A = 32° 18'$.

495. Показать, что если стороны треугольника a, b и c составляют арифметическую прогрессию, то $\operatorname{ctg} \frac{A}{2}$,

$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ тоже составляют арифметическую прогрессию.

496. Показать, что во всяком треугольнике верны соотношения:

1) $a = b\cos C + c\cos B$, 2) $b = a\cos C + c\cos A$,

3) $c = a\cos B + b\cos A$.

Теорема косинусов.

497. Доказать теорему косинусов, исходя из соотношений, данных в задаче 496.

498. Доказать, что для всякого треугольника справедливо соотношение

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\alpha,$$

где α, β и γ — углы треугольника (см. также № 332).

499. Решить треугольник, если даны две стороны и угол, заключенный между этими сторонами:

1) $a = 28$; $c = 42$; $B = 124°$;

2) $b = 2{,}29$; $c = 1{,}69$; $A = 29°\,52'$;

3) $a = 40{,}0$; $b = 32{,}1$; $C = 73°\,40'$;

4) $a = 2{,}29$; $c = 1{,}70$; $B = 39°\,20'$.

500. Решить треугольник, если даны три его стороны:

1) $a = 44$; $b = 483$; $c = 486$;

2) $a = 9{,}9$; $b = 10{,}1$; $c = 15{,}8$;

3) $a = 18{,}0$; $b = 14{,}5$; $c = 16{,}3$;

4) $a = 0{,}77$; $b = 0{,}80$; $c = 1{,}2$.

501. Решить треугольник по данным: $A=\alpha$, $B=\beta$, $h_a=k$.

Приложения.

502. (Устно.)

Чему равна наибольшая площадь треугольника, вершина которого лежит в центре круга радиуса R и основанием которого служит хорда этого круга?

503. (Устно.)

Определить площадь правильного n-угольника, если дан радиус R описанного круга.

504. Два противоположные угла четырехугольника — прямые; диагональ четырехугольника, соединяющая вершины неравных углов, один из которых равен α, равна c. Определить другую диагональ.

505. Через середину высоты равнобедренного треугольника под углом α к этой высоте $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$ проведена прямая, пересекающая обе боковые стороны. Определить отрезок секущей, заключенный внутри треугольника, если высота h треугольника образует с боковой стороной угол β.

506. Определить радиусы вневписанных окружностей при следующей длине сторон треугольника: $a = 3$; $b = 5$; $c = 6$.

507. B, C и D — точки на ребрах трехгранного угла $ABCD$, все плоские углы которого — прямые. Угол BCA равен α, а угол BDA равен β. Определить угол CBD.

508. Две силы, одна из которых равна 15 *кг*, а другая — 20 *кг*, приложены к одной и той же материальной точке под углом в 40° друг к другу. Найти равнодействующую силу и угол, образуемый ею с меньшей из составляющих.

509. На горе, склон которой понижается к горизонту под углом α, стоит дерево. Тень дерева, падающая вниз по склону горы, при зенитной высоте солнца φ равна l *м*. Определить высоту дерева.

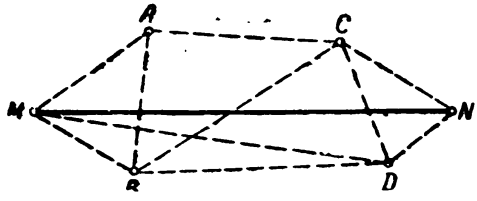
510. Задачу 92 (см. черт. 15) решить с применением теории косоугольных треугольников.

511. Расстояние между пунктами M и N равно d *км*. В некоторый момент времени паровоз, идущий равномерно на прямолинейном участке дороги, находился в пункте A, который был виден из пункта M к направлению MN под углом α, а из пункта N к направлению NM — под углом β.

Через t минут паровоз был уже в пункте B дороги, видимом из пункта M под углом γ к направлению MN, а из пункта N под углом φ к направлению NM.

Построить чертеж и объяснить, какие величины (отрезки, углы) и на основании каких данных следует последовательно вычислять, чтобы определить скорость идущего паровоза.

512. Чтобы определить расстояние между пунктами M и N, взаимно невидимыми, поступили следующим образом (черт. 33) (метод триангуляции).



Черт. 33.

Сначала наметили пункты A и B, видимые взаимно и из пункта M, измерили базис MA (a) и измерили углы MAB (α) и ABM (α_1).

Далее, выбрали пункт C, видимый из пунктов A, B и N, и измерили углы ABC (α_2) и ACB (α_3).

Наконец, выбрав пункт D, видимый из пунктов B, C и N, измерили углы BCD (α_4), CDB (α_5), CDN (α_6), CND (α_7).

Рассказать, какие величины (отрезки, углы) и на основании каких данных следует последовательно вычислять при определении расстояния MN.

Глава VIII

ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

513. Упростить выражение

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)\cdot\sec\frac{\pi}{12}-\sin\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)\cdot\operatorname{cosec}\frac{\pi}{12}.$$

514. (Устно.)

Преобразовать в произведение выражения:

1) $2+\operatorname{tg}\alpha$; 2) $3-\operatorname{ctg}\alpha$.

515. Найти $\sin x$, если $\cos x=\sin 2k$, где $\frac{\pi}{4}<k<\frac{\pi}{2}$.

Доказать тождества (516—524).

516. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$.

517. $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+$

$$+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=0{,}5+\sin^2\alpha.$$

518. $4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{3\alpha}{2}$.

519. $\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}=2\operatorname{ctg}^3\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$.

520. $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}\right)=\sec\frac{\varphi}{2}$.

521. $\frac{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha-\sec\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

522. $\sin\frac{\pi}{2}+2\sin 0{,}1\,\pi=2\sin 0{,}3\,\pi$.

523. $\sin^3\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha-4\sin^4\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\alpha=(1-\cos\alpha)^2(2+\cos\alpha)$.

524. $\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}x=\frac{(1+\cos x)^2}{\cos x(1-\cos x)}$.

525. Найти сумму:

а) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha$;

б) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha$.

526. Найти сумму:

а) $\sin\left(\frac{1}{n}\cdot 2\pi\right)+\sin\left(\frac{2}{n}\cdot 2\pi\right)+\ldots+\sin\left(\frac{n-1}{n}\cdot 2\pi\right)$,

где n — целое нечетное число;

б) $\cos\left(\frac{1}{n}\cdot\pi\right)+\cos\left(\frac{2}{n}\cdot\pi\right)+\cdots+\cos\left(\frac{n-1}{n}\cdot\pi\right)$,

где n — целое четное число.

527. Доказать, что $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ имеют одинаковые знаки при всех допустимых значениях α, и указать множество всех действительных чисел α, для которых обе функции положительны, обе отрицательны.

528. Упростить выражение $\sin x\cdot\cos\alpha+\cos x\cdot\sin\alpha$, если $\cos x=\sin 2\alpha$ и $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

529. а) Доказать тождество: $8\cos^3 18^\circ=5\operatorname{tg}54^\circ$.

б) Доказать неравенства:

1) $3\cos x+5\sin x-1<5$;

2) $\cos\alpha+\alpha\sin\alpha>1$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

в) Доказать теорему: «Биссектриса внутреннего угла треугольника равна удвоенному произведению сторон треугольника, образующих этот угол, на косинус его половины, деленному на сумму тех же сторон треугольника».

г) Отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, проходят через точку пересечения его диагоналей. Доказать с применением тригонометрии.

530. Существует ли значение произведения и, если существует, то чему оно равно:

1) $\lg \sin 0{,}1\pi \cdot \lg \sin 0{,}2\pi \cdot \lg \sin 0{,}3\pi \ldots \lg \sin 0{,}9\pi$;

2) $\lg \cos 0{,}1\pi \cdot \lg \cos 0{,}2\pi \ldots \lg \cos 0{,}5\pi$;

3) $\lg \operatorname{tg} 25° \cdot \lg \operatorname{tg} 30° \cdot \lg \operatorname{tg} 35° \ldots \lg \operatorname{tg} 85°$;

4) $\lg \operatorname{ctg} 20° \cdot \lg \operatorname{ctg} 30° \cdot \lg \operatorname{ctg} 40° \ldots \lg \operatorname{ctg} 90°$.

531. Найти $\cos^2 x$, если $x = \arcsin \dfrac{\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{3}$, и указать множество допустимых значений α.

532. Доказать тождество $\dfrac{1 - 2\sin^2 \alpha}{1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \dfrac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$ и указать, как изменилась область определения исходного выражения.

533. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$y = a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

534. Из всех треугольников, имеющих одинаковое основание и угол при вершине, наибольшую площадь имеет равнобедренный. Доказать.

535. Если A и B — углы треугольника и $\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B > 1$, то треугольник — тупоугольный. Доказать.

536. Если тангенсы половин углов треугольника составляют арифметическую прогрессию, то косинусы целых углов также составляют арифметическую прогрессию. Доказать.

537. Доказать, что если α, β, γ — углы острые, то равенство $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

538. Провести прямую, пересекающую две стороны треугольника, так, чтобы площадь данного треугольника де-

лилась пополам и чтобы отрезок секущей внутри треугольника был наименьшим из возможных.

Решить уравнения (№ 539—565)*.

539. $1 + \cos x = \sin x + 2 \sin x \cdot \cos x.$

540. $\sin 11x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7x + \frac{1}{2} \cos 7x = 0.$

541. $\sin (x+25^\circ) \cdot \sin (x - 20^\circ) = \sin (70^\circ + x) \sin (65^\circ - x).$

542. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x.$

543. $\sin 2x \cdot \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \cdot \sin 4x + \cos^2 4x.$

544. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$

545. $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$

546. а) $\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = 0.$

б) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$

547. $\cos x - 1 = 8 \cos x \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}.$

548. $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \cos x + \sin x.$

549. $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2.$

550. $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 0.$

551. $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$

552. $\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x = 0.$

553. $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = 0.$

---

* При решении уравнений руководствоваться указаниями, имеющимися в ответах к задачам 426 и 429.

554. $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} 2x = \sin x\left(1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$.

555. $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = 2{,}5$.

556. $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 3x \cdot \sec x = 0$.

557. $\frac{1 + \cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$.

558. $\sin x + 8\cos x = 7$, где $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

559. $\frac{4\operatorname{ctg}^3\left(45^\circ + \frac{x}{4}\right)}{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, при условии, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

560. $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\alpha - x)$.

561. $a(2\cos^2 x - 1) = b(\sin x - \cos x)^2$.

562. $\sin\left(\frac{5}{3}\pi \cos \pi x\right) = \frac{1}{2}$.

563. $\sin(\pi \operatorname{tg} x) = \cos(\pi \operatorname{tg} x)$.

564. $|\sin x| = x^2$.

565. $\sin x = 0{,}1\, x$.

Указания к уравнениям 564 и 565.

а) Предварительно установить (устно): 1) сколько корней имеет уравнение; 2) чему равен корень, непосредственно усматриваемый из уравнения и не требующий вычислений; 3) число корней, требующих вычисления.

б) Корни вычислить с точностью до 0,01.

566. Следующие функции исследовать по их графикам:

1) $y = |\sin(\cos x)|$; 2) $y = \lg \cos x$; 3) $y = 2^{\sin x}$.

567*. Найти производную от следующих функций:

1) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 2) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; 3) $y = \operatorname{tg}^2 x$;

4) $y = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$; 5) $y = \sin^2\frac{x}{2}$; 6) $y = \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}$;

7) $y = \cos^2 2x$.

568. Доказать: 1) $(\cos^2 x \cdot \sin x)' = \cos x\,(1 - 3\sin^2 x)$.

2) $\left(\cos^2 x \cdot \sin^2\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{4}\sin 2x\,(3\cos x - 2)$.

569. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ найти значение x, при котором функция $y = \sin^2 x \cdot \cos^2\frac{x}{2}$ имеет наибольшее значение.

570. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ найти значение x, при котором функция $y = \operatorname{ctg}^3\left(45° - \frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg} x$ имеет наименьшее значение.

Приложения тригонометрии.

571. Радиус Земли равен R, расстояние до наблюдаемой планеты равно d, зенитная высота планеты в момент наблюдения равна z. Определить параллакс планеты в момент наблюдения.

Чему будет равен наибольший параллакс планеты и как он называется?

572. Вычислить при помощи логарифмической линейки расстояние от Земли, радиус которой $63{,}7 \cdot 10^2$ *км*, до Луны, горизонтальный параллакс которой считать равным $47'$, и до Солнца, приняв его горизонтальный параллакс равным $8'',80$.

Указание. См. вводное пояснение к задаче 113.

---

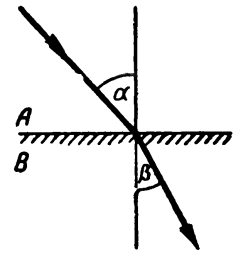
* До введения производной в программу школы задачи 567—570, 576, 578, 665, 678, 707, 736 и 749 предлагаются лишь для кружковых занятий.

573. Найти угол естественного откоса грунта (наибольший угол, при котором скатывающаяся по откосу частица грунта еще уравновешивается силой трения), если коэффициент трения грунта равен k.

574. Из физики известно, что показатель преломления среды, в которую луч входит (B — на чертеже 34), относительно среды, из которой луч исходит (среда A на чертеже), равен отношению синуса угла падения (α) к синусу угла преломления (β): $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, где n — показатель преломления.

а) Определить угол преломления луча, если угол его падения равен 42° и показатель преломления равен 1,43.

б) Определить угол падения луча, если угол его преломления равен 37°20′ и показатель преломления равен 1,6.



Черт. 34.

в) Определить показатель преломления среды, если угол падения луча равен 72°, а угол его преломления равен 52°30′.

575. Угол преломления трехгранной призмы равен 40°, коэффициент преломления вещества призмы равен 1,5. Найти угол отклонения луча, если угол его падения равен углу, под которым луч выходит из призмы.

576. Из бревна, наименьший диаметр которого равен d, требуется изготовить балку с прямоугольным поперечным сечением и наибольшей прочности; известно, что прочность балки пропорциональна ее основанию и квадрату высоты. Найти размеры поперечного сечения (его основание и высоту) требуемой балки.

Указание. Решить с применением тригонометрии (введением вспомогательного неизвестного — угла x между диагональю d и основанием сечения).

577. Зависимость между силой переменного тока в цепи и временем (в секундах) выражается уравнением: $i = 10 \sin 700t$ (ампер).

Определить наибольшую силу тока в цепи, его частоту и силу тока в конце: 1-й секунды, 5-й секунды и 12-й секунды.

578. Подвешенный на пружине груз в m граммов, оттянутый вниз на 10 *см* и затем отпущенный, совершает

колебательное движение по закону (без учета трения): $S = 10 \sin(6\pi t - 0{,}5\pi)$, где S — расстояние груза от положения равновесия.

а) Найти положение груза на траектории его движения, скорость и ускорение движения, направление движения и действующую силу в момент времени (в секундах):

1) $t = 5{,}6$; 2) $t = 12{,}4$; 3) $t = 1{,}55$.

б) Через какой наименьший от начала движения промежуток времени и в какой точке траектории:
1) скорость движения будет наибольшей и наименьшей?
2) ускорение будет наибольшим и наименьшим?

Глава IX

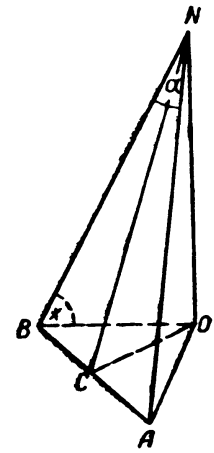
ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 1. Прямые и плоскости*

579. Конец перпендикуляра, восставленного из центра правильного n-угольника к плоскости этого многоугольника, соединен наклонными с концами одной из сторон многоугольника. Определить угол между наклонной и плоскостью n-угольника, если угол между наклонными равен α (черт. 35).

Установить допустимые значения параметра α. Вычислить искомый угол по данным: 1) $n = 8$, $\alpha = 50°$; 2) $n = 12$, $\alpha = 20°$.

Указания. а) Рассматривая изображение заданной условием задачи геометрической фигуры (черт. 35), находим, что угол α — положительный как угол треугольника BNA ($\alpha > 0$); кроме того, угол BNA (α) меньше угла BOA $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, в чем нетрудно убедиться или сравнением тангенсов половин этих углов $\left(\frac{BC}{CN} < \frac{BC}{CO}\right.$, так как $CN > CO$ — гипотенуза больше катета$\left.\right)$, или сравнением этих углов геометрически — наложением треугольника BNA на треугольник



Черт. 35.

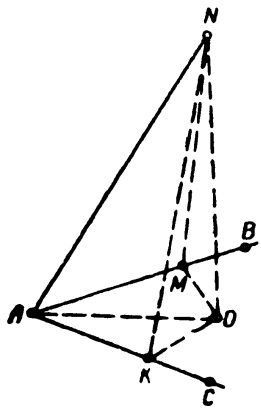
* Задачи 579 — 585 рекомендуется решить в IX классе на уроках, сопровождая решение основательным рассмотрением построения изображения заданной условием задачи пространственной фигуры с обоснованием (доказательством) свойств элементов этой фигуры, например (черт. 36): AO — биссектриса угла BAC, если NO — перпендикуляр к плоскости угла BAC; $NM \perp AB$, если $OM \perp AB$, и т. п.

BOA (путем вращения около общей стороны AB) и рассмотрением полученной фигуры (выполняется на вспомогательном чертеже с учетом того, что $NC > CO$).

Таким образом, угол α может принимать любое значение в промежутке между 0 и $\frac{2\pi}{n}$, эти значения и составляют множество допустимых значений параметра α: $0 < \alpha < \frac{2\pi}{n}$.

б) При $n = 8$ будем иметь: $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, поэтому при $\alpha = 50°$ заданной условием задачи фигуры не существует ($\alpha = 50° > \frac{\pi}{4}$, а должно быть: $\alpha < \frac{\pi}{4}$) и несуществующего угла вычислять не следует.

При $n = 12$ и $\alpha = 20°$ вычислять искомый (теперь существующий: $\alpha = 20° < \frac{2\pi}{12} = 30°$) угол следует.



Черт. 36.

580. Из вершины A угла BAC, равного α, проведена наклонная к плоскости этого угла, образующая с его сторонами AB и AC равные острые углы β (черт. 36). Определить угол между проведенной наклонной и плоскостью угла BAC. Установить допустимые системы значений параметров α и β.

Вычислить (при помощи логарифмической линейки) искомый угол по данным:

1) $\alpha = 140°$, $\beta = 50°$; 2) $\alpha = 150°$, $\beta = 80°$; 3) $\alpha = 84°$, $\beta = 142°$.

Указания. а) Допустимой системой значений параметров α и β называется такая пара их значений, при которой заданная условием задачи геометрическая фигура существует.

Рассматривая изображение этой фигуры (черт. 36), замечаем, что $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \alpha < \pi$ и что угол $ANBC$ — трехгранный, а потому $2\beta > \alpha$; отсюда множество всех допустимых систем значений параметров α и β будет таким: $0 < \frac{\alpha}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

б) При $\alpha = 140°$ и $\beta = 50°$ заданной фигуры, а потому и искомого угла не существует, так как $\frac{\alpha}{2} = 70° > \beta = 50°$, а должно быть: $\frac{\alpha}{2} < \beta$; вычисления производить не следует.

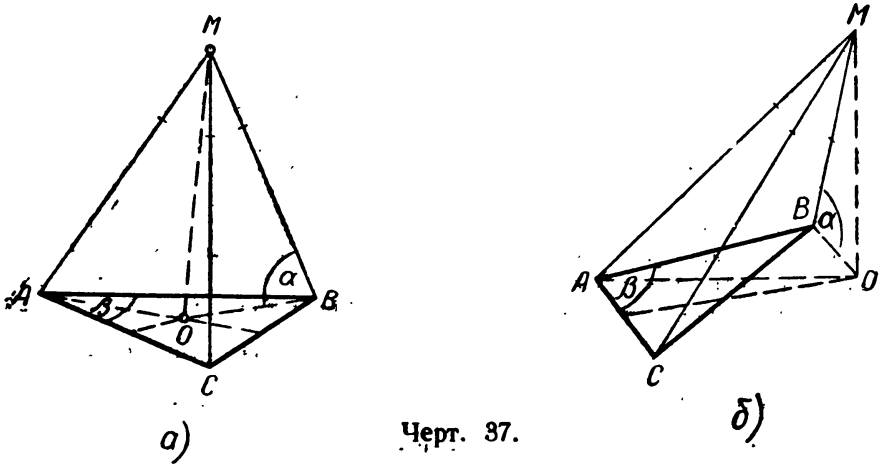
При $\alpha = 150°$ и $\beta = 80°$ заданная фигура, а следовательно, и искомый угол существуют $\left(\frac{\alpha}{2} = 75° < 80° = \beta\right)$ и вычисление следует выполнить.

При $\alpha = 84°$ и $\beta = 142°$ соотношение $\frac{\alpha}{2} = 42° < \beta = 142°$ выполняется, но значение β не является допустимым для него (должно быть $\beta < \frac{\pi}{2}$), и вычисление отпадает.

581. Конец N перпендикуляра, восставленного к плоскости прямоугольника $ABCD$ ($AB < BC$) из его вершины B, соединен наклонными с остальными вершинами прямоугольника. Бо́льшая из полученных наклонных образует с плоскостью прямоугольника угол φ, острый угол между диагоналями прямоугольника равен α. Определить угол NAB и угол NDA.

Установить допустимые системы значений параметров α и φ.

582. Точка M находится вне плоскости равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) и на равном расстоянии от его вершин; боковая сторона треугольника равна b, а угол при его вершине равен β. Найти расстояние от точки M до плоскости треугольника, если отрезок MB наклонен к плоскости треугольника под углом α (черт. 37).

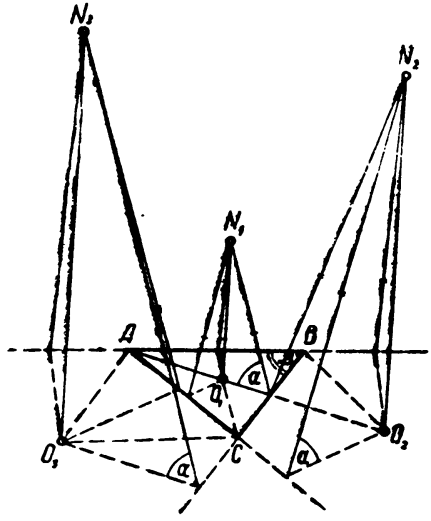


а) Черт. 37. б)

В какую точку плоскости треугольника ABC должна проектироваться точка M согласно условию задачи? (Доказать.)

Установить допустимые системы значений параметров α и β (см. чертежи *а* и *б*)

583. Точка N находится вне плоскости равнобедренного треугольника с основанием a и прилежащим к нему углом β. Все три перпендикуляра, опущенные из точки N на стороны треугольника (или их продолжение), наклонены к плоскости треугольника под одним и тем же углом α. Найти расстояние от точки N до плоскости треугольника.



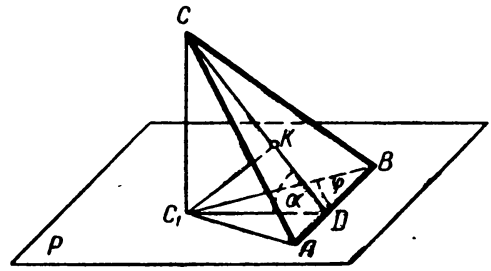
Черт. 38.

Рассмотреть все возможные случаи (черт. 38).

Установить допустимые системы значений параметров α и β.

584. Проекция треугольника ABC на плоскость P есть прямоугольный треугольник ABC_1, в котором угол C_1 — прямой, угол B равен φ и катет C_1B равен a. Найти расстояние от вершины C_1 прямого угла до плоскости треугольника ABC, если двугранный угол $CABC_1$ равен α (черт. 39). Установить допустимые системы значений параметров α и φ.

585. Угол A треугольника ABC равен α и угол B равен β. Опираясь стороной AC на плоскость P, треугольник ABC образует с этой плоскостью острый двугранный угол φ. Проекция B_1 вершины B треугольника на плоскость P отстоит от плоскости треугольника ABC на d *дм*. Определить площадь треугольника ABC. Установить допустимые системы значений параметров α, β и φ.



Черт. 39.

586. Треугольник, площадь которого равна q, одной своей стороной опирается на плоскость P и наклонен к этой плоскости под углом α. Найти площадь проекции данного треугольника на плоскость P.

Изменится ли площадь проекции треугольника на плоскость P, если при том же угле наклона треугольник будет опираться на плоскость P другими сторонами?

587. Площадь проекции двухскатной крыши на горизонтальную плоскость равна q. Определить площадь крыши, если оба ее ската одинаково — под углом α — наклонены к горизонту.

588. Площадь прямоугольной прорези на скате крыши для вывода трубы равна 32,6 $дм^2$. Определить угол наклона ската крыши к горизонту, если поперечное сечение трубы имеет форму квадрата со стороной в 5 $дм$.

§ 2. Многогранники

Призма.

589. Практическая работа. На модели прямоугольного параллелепипеда измерить стороны оснований и высоту и по этим данным найти при помощи логарифмической линейки:

а) диагонали: 1) основания, 2) боковых граней, 3) параллелепипеда;

б) углы: 1) наклона диагонали параллелепипеда к плоскости его основания и каждой из неравных боковых граней, 2) между большей стороной основания и пересекающей эту сторону диагональю параллелепипеда, 3) между той же стороной основания и пересекающей ее диагональю боковой грани;

в) площади диагональных сечений (сколько различных?).

Указание. При выполнении работы полезно пользоваться вспомогательными чертежами.

590. Диагональ d прямоугольного параллелепипеда образует с его боковой гранью угол α; проходящее через эту диагональ и боковое ребро сечение параллелепипеда образует с той же боковой гранью двугранный угол β. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

Доказать, что в заданном параллелепипеде множество допустимых систем значений параметров α и β выражается соотношением $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

591. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α. Сечение призмы, проходящее через диагонали неравных

боковых граней, наклонено к основанию призмы под углом β. Найти боковую поверхность призмы. Установить допустимые системы значений параметров α и β.

592. (Устно.) а) Какими двумя способами можно вычислять объем всякой призмы?

б) Площади двух граней параллелепипеда равны p и q, их общее ребро равно l, а образованный ими двугранный угол равен α. Определить объем параллелепипеда.

593. (Устно.) В основании параллелепипеда лежит параллелограмм с диагоналями b и c и углом α между ними. Боковое ребро параллелепипеда равно c и наклонено к плоскости основания под углом α. Определить объем параллелепипеда.

594. В основании призмы лежит равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), в котором сторона AB равна b и угол A равен α. Боковое ребро призмы, проходящее через вершину A основания, перпендикулярно к стороне BC основания призмы, равно l и наклонено к плоскости основания под углом φ. Определить объем призмы и площадь боковой грани, проходящей через сторону BC основания. Установить допустимые системы значений α и φ.

595. В основании параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α при вершине A.

Боковое ребро AA_1 параллелепипеда равно b и образует со сторонами AB и AD основания равные острые углы β. Найти площади диагональных сечений параллелепипеда.

При каких из следующих систем значений параметров имеет смысл вычислять площади диагональных сечений и при каких не имеет смысла:

1) $a = 0{,}34$; $b = 0{,}07$; $\alpha = 80°$; $\beta = 50°$.

2) $a = 0{,}9$; $b = 48{,}4$; $\alpha = 50°$; $\beta = 80°$.

3) $a = 86{,}4$; $b = 0{,}3$; $\alpha = 70°$; $\beta = 32°$.

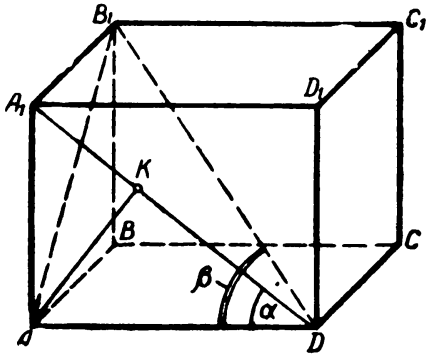
4) $a = 13$; $b = 17$; $\alpha = 80°$; $\beta = 107°$.

596. Каждое ребро прямой четырехугольной призмы равно a, а острый угол ее основания равен α. Определить площадь сечения призмы, проходящего через противоположные стороны оснований.

597. В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция; радиус круга, вписанного в эту трапецию, равен r; острый двугранный угол между боковыми гранями призмы равен α. Плоскость, проходящая через диагонали непараллельных боковых граней, наклонена к плоскости основания призмы под углом β. Определить объем призмы.

598. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с меньшей стороной b и острым углом α. Сечение параллелепипеда, проходящее через противолежащие большие стороны оснований, наклонено к плоскости основания параллелепипеда под углом α. Определить объем параллелепипеда, если площадь проведенного сечения равна Q.

599. Диагональ большей по площади боковой грани прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости его основания под углом α, диагональ параллелепипеда образует с большей стороной его основания угол β. Расстояние от меньшей стороны основания до непересекающей ее диагонали параллелепипеда равно d (черт. 40). Определить объем параллелепипеда.

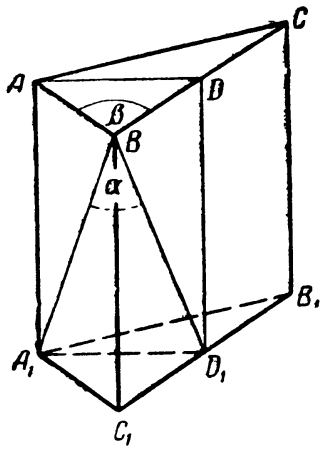


Черт. 40.

Доказать, что в заданном параллелепипеде должно выполняться соотношение: $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ (при доказательстве исходить от изображения заданного параллелепипеда).

Указание. Если провести отрезок AK (в грани AA_1DD_1, перпендикулярно к диагонали A_1D, то этот отрезок AK и будет общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым AB и B_1D (доказать!); отрезком AK будет измеряться расстояние между AB и B_1D (общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым не обязательно должен пересекать обе прямые).

600. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), в котором сторона BC равна a и угол ABC равен β. Диагональ одной из равных боковых граней образует с неравной другим боковой гранью



Черт. 41.

угол α (черт. 41). Определить боковую поверхность призмы. Исследовать решение.

601. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a. Через диагональ боковой грани проведено сечение призмы параллельно высоте основания, скрещивающейся с этой диагональю. Определить объем призмы и площадь сечения, если угол наклона сечения к плоскости основания призмы равен φ.

Указание. Выполнив изображение призмы с сечением и заданным углом, далее решить устно.

602. В основании призмы лежит равнобедренный треугольник ABC с углом α при его основании BC.

Боковое ребро AA_1 призмы равно l и наклонено к плоскости основания призмы под углом β, причем вершина A_1 равно удалена от вершин A, B и C основания призмы. Определить боковую поверхность призмы.

603. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб с острым углом α. Через какую вершину ромба и под каким углом к плоскости основания нужно провести сечение параллелепипеда, параллельное диагонали основания, чтобы в сечении получился квадрат?

604. Если α, β и γ — углы между ребрами и диагональю прямоугольного параллелепипеда, исходящими из одной его вершины, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; если же это углы между диагональю параллелепипеда и его гранями, сходящимися в конце диагонали, то $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$. Доказать.

Пирамида.

605. Практическая работа. На модели правильной пирамиды измерить сторону основания и боковое ребро и далее вычислить, пользуясь логарифмической линейкой:

а) апофему и высоту пирамиды;

б) углы: 1) наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды; 2) наклона боковой грани к основанию пирамиды; 3) плоский при вершине пирамиды.

606. (Устно.) Площадь основания правильной n-угольной пирамиды равна q, угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью ее основания равен α. Чему равна боковая поверхность пирамиды?

607. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α, радиус описанной около боковой грани окружности равен R. Найти полную поверхность пирамиды.

608. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α, радиус вписанного в боковую грань круга равен r. Определить полную поверхность пирамиды.

609. Каждое из пяти равных ребер треугольной пирамиды равно l; угол между равными ребрами в грани, имеющей вид равнобедренного треугольника, равен $\varphi \left(\varphi \neq \frac{\pi}{3}\right)$.

Найти полную поверхность пирамиды.

610. (Устно.) В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с меньшим катетом a и прилежащим к нему острым углом β. Определить объем пирамиды, если ее высота равна большему катету основания.

611. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α, боковая поверхность пирамиды равна Q. Определить объем пирамиды.

612. В основании пирамиды лежит ромб с острым углом α. Диагональное сечение пирамиды представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является диагональ ромба, соединяющая вершины его тупых углов; это сечение наклонено к плоскости основания пирамиды под углом α, его площадь равна q. Определить объем пирамиды.

613. Сечение правильной треугольной пирамиды, проходящее через боковое ребро и высоту пирамиды, есть прямоугольный треугольник. Определить угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания.

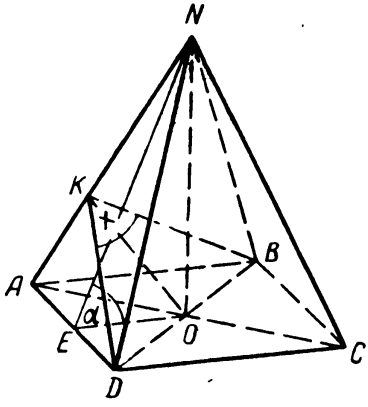
614. Определить плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды, если ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

615. Двугранный угол при стороне основания правильной шестиугольной пирамиды равен φ. Определить угол наклона бокового ребра пирамиды к ее основанию.

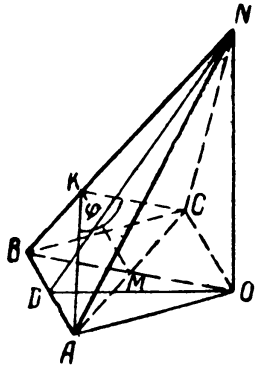
616. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом β. Найти двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

Установить допустимые значения искомого угла. Вычислить искомый угол при $\beta = 43°16'$.

617. Двугранный угол при стороне основания правильной четырехугольной пирамиды равен α. Определить двугранный угол, образуемый двумя смежными боковыми гранями пирамиды (черт. 42). Решить методом введения вспомогательного угла.



Черт. 42.



Черт. 43.

618. Определить боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна a и угол между смежными боковыми гранями равен φ (черт. 43). Исследовать решение.

619. Определить объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и двугранным углом при боковом ребре φ.

620. В основании пирамиды $NABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$ с острым углом A, равным α; боковые ребра NB и ND перпендикулярны к сторонам BC и AD основания и образуют с его плоскостью углы, равные φ. Определить углы наклона боковых граней пирамиды к ее основанию.

621. Одна из боковых граней пирамиды, в основании которой лежит прямоугольник, перпендикулярна к плоскости основания пирамиды и имеет вид равнобедренного треугольника; боковые ребра, лежащие в противоположной боковой грани и равные порознь a, образуют между

собой угол 2φ, а с первой боковой гранью угол φ. Определить объем пирамиды и угол между двумя названными противоположными боковыми гранями. Исследовать решение.

622. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a. Две боковые грани пирамиды, образующие острый двугранный угол α, перпендикулярны к основанию пирамиды, а две другие наклонены к плоскости основания под углом β. Определить полную поверхность пирамиды.

623. Площадь основания правильной n-угольной пирамиды равна S, боковая грань пирамиды образует с ее высотой угол α. Определить полную поверхность и объем пирамиды.

624. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды проведено сечение пирамиды под углом α к ее основанию. Определить площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна a и боковое ребро пирамиды наклонено к основанию под углом 2α. Исследовать решение.

625. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Через вершину основания пирамиды проведено сечение, перпендикулярное к противолежащему боковому ребру. Определить площадь сечения.

626. В правильной шестиугольной пирамиде расстояние от меньшей диагонали основания до бокового ребра, проходящего через вершину равнобедренного треугольника, отсекаемого от шестиугольника диагональю, равно k. Определить площадь сечения, проходящего через вершину пирамиды и меньшую диагональ основания, если наклон бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания измеряется углом φ.

627. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему острым углом α. Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом φ. Определить объем пирамиды.

628. (У с т н о.) В основании пирамиды лежит прямоугольник с диагональю d и углом α между диагоналями; каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом β. Найти объем пирамиды.

629. В основании пирамиды $NABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием BC, равным a, и углом при вершине α. Все боковые ребра пирамиды образуют

с ее высотой равные углы; плоский угол BNC равен β. Определить объем пирамиды. Исследовать решение.

630. (Устно.) В основании пирамиды лежит ромб с диагоналями c и d. Каждая боковая грань пирамиды образует с ее основанием двугранный угол β. Определить полную поверхность пирамиды.

631. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием a и прилежащим к нему углом α. Определить боковую поверхность пирамиды, если ее боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ.

632. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция с углом α между равными отрезками диагоналей, основания трапеции равны a и b $(a>b)$; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания. Определить объем пирамиды, если двугранные углы при параллельных сторонах основания относятся, как 1 : 2. Исследовать решение.

633. В основании пирамиды, все боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом α, лежит равнобедренный треугольник с углом φ при вершине; основание высоты пирамиды отстоит от боковой грани на расстоянии d. Определить объем пирамиды.

634. В правильной треугольной пирамиде расстояние между боковым ребром и противолежащей ему стороной основания равно c. Определить боковую поверхность пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен α. Исследовать решение.

Усеченная пирамида.

635. Практическая работа. На модели правильной усеченной пирамиды измерить стороны оснований и боковое ребро и по полученным данным вычислить при помощи логарифмической линейки:

а) апофему, высоту, диагонали пирамиды;

б) углы: 1) острый боковой грани, 2) наклона бокового ребра к плоскости основания, 3) наклона боковой грани к плоскости основания, 4) наклона диагоналей пирамиды к плоскости основания, 5) между стороной основания и диагональю пирамиды;

в) боковую поверхность, полную поверхность, объем пирамиды.

636. (Устно.) Если площадь верхнего основания правильной усеченной n-угольной пирамиды равна q, площадь ее нижнего основания равна Q и двугранный угол

при стороне нижнего (большего по площади) основания равен α, то чему равна боковая поверхность этой пирамиды?

637. Найти полную поверхность и объем правильной усеченной треугольной пирамиды, стороны оснований которой равны a и b $(a>b)$ и двугранный угол при стороне a основания пирамиды равен α.

638. Диагональ d правильной усеченной четырехугольной пирамиды перпендикулярна к боковому ребру пирамиды, которое наклонено к плоскости ее основания под углом φ. Определить объем пирамиды. Исследовать решение данной задачи.

Комбинация многогранников.

639. Основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция с боковой стороной a и острым углом α. В эту призму вписана пирамида так, что ее основанием является одно из оснований призмы, а ее вершина лежит в плоскости другого основания. Определить боковую поверхность пирамиды, если каждая ее боковая грань образует с плоскостью основания двугранный угол $\varkappa$.

640. Правильный n-угольник со стороной a является общим основанием двух пирамид, расположенных по одну сторону от общего основания. Двугранный угол при стороне основания одной пирамиды равен α, а при стороне основания другой равен β $(\alpha > \beta)$. Определить объем той части пространства, которая заключена между боковыми поверхностями пирамид.

641. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом α. Через сторону основания параллелепипеда и середину противолежащего ей бокового ребра проведено сечение параллелепипеда, образующее с плоскостью основания двугранный угол α. Определить боковую поверхность и объем отсеченной треугольной призмы, если боковое ребро параллелепипеда равно a.

642. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник ABC, сумма катетов AC и BC которого равна m, а острый угол A равен α. Через диагональ боковой грани, проходящей через катет AC, проведено перпендикулярное к этой грани сечение призмы, образующее с плоскостью ее основания двугранный угол β. Определить боковую поверхность отсеченной четырехугольной пирамиды.

643. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плос-

кости ее основания, а большее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

В эту пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что четыре его вершины лежат в плоскости основания пирамиды, а четыре других — на боковых ее ребрах. Определить объем параллелепипеда, если его диагональ наклонена к основанию под углом β.

644. Плоскости, проходящие через две противоположные стороны меньшего по площади основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды перпендикулярно к ее основанию, делят пирамиду на три части, объем каждой из которых и требуется определить. Известно, что стороны оснований пирамиды равны a и b ($a > b$) и что двугранный угол при стороне a равен α.

Указание. Объем части, имеющей форму клина, найти непосредственно, для чего рассечь клин на треугольную призму и четырехугольную пирамиду.

645. Две пирамиды имеют общее основание — квадрат со стороной a — и равные высоты, проходящие через противоположные вершины квадрата; большее боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α. Определить объем составленного пирамидами многогранника.

646. В основании прямой призмы лежит параллелограмм со сторонами a и b ($a > b$) и углом α между ними.

В эту призму вписаны две пирамиды так, что каждое из оснований призмы служит основанием одной из этих двух пирамид, а вершина каждой из пирамид лежит в точке пересечения диагоналей основания призмы, противоположного основанию пирамиды; двугранный угол при большей стороне основания пирамиды равен α. Определить объем той части призмы, которая лежит вне пирамид.

§ 3. Круглые тела

Цилиндр.

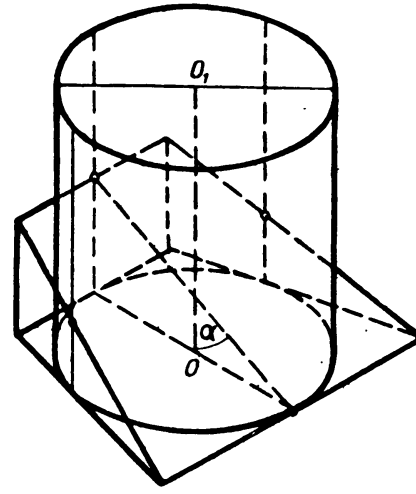
647. Сторона правильного n-угольника, вписанного в основание цилиндра, равна a и видна из центра другого основания цилиндра под углом α. Найти высоту цилиндра. Исследовать решение.

648. Точка окружности одного основания равностороннего цилиндра соединена отрезком с точкой окружности другого основания; угол между радиусами оснований, про-

веденными в указанные точки, равен α. Найти угол между отрезком, соединяющим эти две точки, и осью цилиндра.

649. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности его основания дугу α ($\alpha < \pi$). Определить площадь сечения, если радиус основания цилиндра равен R, а диагональ сечения наклонена к плоскости основания цилиндра под углом β.

650. Все стороны равнобочной трапеции касаются цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна к параллельным сторонам трапеции a и b ($a > b$) и образует угол α с ее плоскостью (черт. 44). Определить площадь трапеции.



Черт. 44.

651. Вершины квадрата со стороной a лежат на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна к стороне квадрата и образует с его плоскостью угол α. Найти радиус основания цилиндра.

652. Площадь осевого сечения цилиндра равна Q, диагональ этого сечения наклонена к плоскости основания цилиндра под углом α. Найти полную поверхность и объем цилиндра.

653. Диагональ прямоугольной развертки цилиндрической поверхности равна d, угол между диагоналями развертки, обращенный к образующей, равен α. Найти полную поверхность и объем цилиндра.

Вычислить полную поверхность при $d = 21{,}2$ *дм* и $\alpha = 57°32'$ двумя способами:

1) найти суммы и квадратный корень при помощи таблиц, исключая логарифмические, полученное произведение вычислить при помощи логарифмических таблиц;

2) все вычисления выполнить при помощи логарифмической линейки.

Конус.

654. Высота конуса равна h, угол между высотой и образующей равен α. Найти площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две взаимно перпендикулярные образующие.

Можно ли вычислять площадь заданного сечения, если 1) $h = 12$ и $\alpha = 40°$; 2) $h = 0{,}03$ и $\alpha = 80°$; 3) $h = 20$ и $\alpha = 140°$.

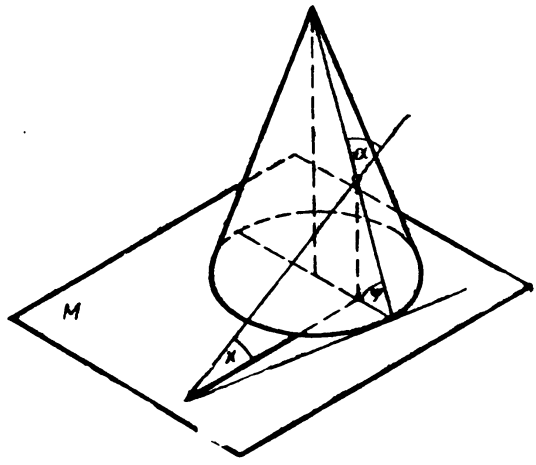
655. Плоскость, проходящая через две образующие конуса, пересекает его основание по хорде a, стягивающей дугу $\alpha(\alpha < \pi)$. Определить площадь сечения, если угол между плоскостью сечения и высотой конуса равен β.

656. Угол при вершине осевого сечения конуса равен α. Чему равен центральный угол развертки конической поверхности?

Указание. См. № 116 и 117.

657. Центральный угол в разьертке конической поверхности равен 2; определить угол наклона образующей конуса к его основанию.

658. Прямая линия — касательная к боковой поверхности конуса — пересекает образующую, проходящую через точку касания, под углом α (черт. 45). Определить



Черт. 45.

угол наклона касательной и плоскости M, в которой лежит основание конуса, если угол наклона образующей конуса к этой плоскости равен φ.

659. Образующая l конуса наклонена к плоскости его основания под углом α. Определить полную поверхность и объем конуса.

660. Площадь осевого сечения конуса равна Q, угол между высотой и образующей конуса равен α. Найти полную поверхность и объем конуса.

661. Боковая поверхность конуса равна S, угол при вершине осевого сечения равен α. Определить полную поверхность (у с т н о) и объем конуса.

662. Угол между высотой и образующей конуса равен α, сумма высоты и радиуса основания конуса равна m. Определить полную поверхность конуса и его объем.

663. Два конуса расположены по одну сторону от их общего основания; угол наклона образующей к плоскости основания в одном конусе равен α, а в другом равен β ($\alpha > \beta$), разность между высотами конусов равна d. Найти объем той части большего по объему конуса, которая расположена вне меньшего.

664. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен α, площадь развертки равна S. Найти объем конуса и вычислить его при $S = 24{,}7$ и $\alpha = 130°$.

665. Требуется наиболее экономно (т. е. с наименьшей затратой материалов на его покрытие) соорудить конический шатер заданного объема v. Найти удовлетворяющий поставленной задаче радиус основания шатра.

Указание. Ввести вспомогательное неизвестное — угол между образующей и основанием конуса и исследовать на minimum формулу конической поверхности (конического покрытия шатра) при помощи производной.

666. Определить объем кучи песка конической формы с естественным уклоном образующей, равной l, если коэффициент трения песчаного грунта равен k (смотри задачу № 573).

Усеченный конус

667. Плоскость, проходящая через образующие усеченного конуса, отсекает от окружностей оснований конуса численно равные дуги. Доказать.

668. Через образующие усеченного конуса, сходящиеся под углом α, проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу β. Определить боковую поверхность конуса, если радиусы его оснований равны R и r ($R > r$).

669. Острый угол в осевом сечении усеченного конуса равен α, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти

полную поверхность и объем усеченного конуса, если его образующая равна l.

670. Точка пересечения диагоналей осевого сечения усеченного конуса делит высоту конуса в отношении 3 : 2; угол между этими диагоналями, обращенный к образующей, равен α. Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса, если его высота равна h.

Комбинации цилиндра, конуса и многогранников.

671. Основания прямоугольного параллелепипеда вписаны в основания цилиндра, диагональ d параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом α. Определить полную поверхность и объем цилиндра, описанного около данного параллелепипеда.

672. В правильную треугольную пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что одно основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, а другое касается всех ее боковых граней. Найти высоту цилиндра, если боковое ребро пирамиды равно l и наклонено к плоскости основания под углом α.

673. В конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания конуса под углом α, вписана прямая треугольная призма с равными ребрами так, что одно основание призмы лежит в плоскости основания конуса. Найти длину ребра призмы.

674. В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от центра основания до боковой грани равно d, угол между высотой пирамиды и боковой гранью равен α. Найти полную поверхность конуса, вписанного в данную пирамиду.

675. В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник и боковая грань которой, проходящая через один из катетов основания, образует с плоскостью основания двугранный угол α. Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом β.

676. В конус вписан цилиндр так, что одно основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса; высота цилиндра равна радиусу основания конуса. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания, если площадь основания конуса относится к полной поверхности цилиндра, как 2 : 3.

677. Цилиндр и конус имеют общую ось; радиус основания конуса равен R, а радиус основания цилиндра ра-

вен r ($R>r$); угол между образующей и осью конуса равен α. Найти объем усеченного конуса, отсеченного от данного полного плоскостью, проходящей через линию пересечения цилиндрической и конической поверхностей.

678. В данный конус вписать цилиндр наибольшего объема.

Шар.

679. Дан материальный шар, на поверхности которого возможны построения циркулем. Пользуясь только циркулем и линейкой, выполнить следующие упражнения:

а) построить на бумаге отрезок, равный диаметру шара;

б) показать на поверхности шара две точки, соответствующие концам произвольного диаметра шара;

в) построить и вычислить угол между заданной отрезком хордой шара и его диаметром (измерить отрезки); сверить результат вычисления, измерив построенный угол при помощи транспортира;

г) зная угол между хордой и диаметром по предыдущему упражнению, найти площадь сечения шара плоскостью, проходящей через конец хорды перпендикулярно к диаметру; сверить результат, найдя ту же площадь геометрически (без использования угла);

д) вычислить кратчайшее по поверхности шара расстояние между концами заданной хорды.

680. Касательная к шару радиуса R и секущая, проходящая через центр шара, проведены из одной и той же точки A и образуют между собой угол α. Определить наименьшее и наибольшее расстояние от точки A до поверхности шара.

681. Через точку, лежащую на поверхности шара радиуса R, проведена к шару касательная плоскость и под углом α к ней секущая шар плоскость. Определить площадь полученного сечения шара и кратчайшее по поверхности шара расстояние между концами диаметра сечения шара.

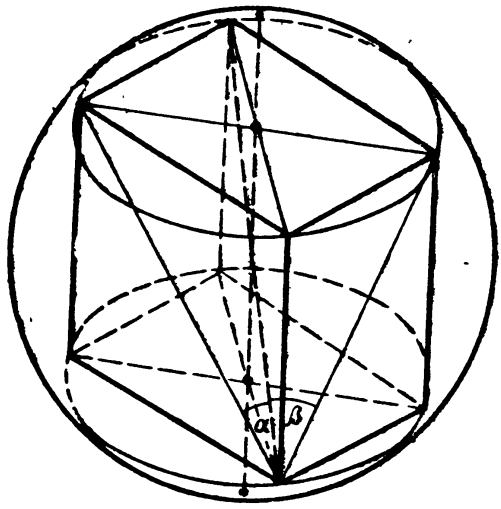
682. Через конец радиуса шара, лежащий на поверхности шара, под углом α к радиусу проведена секущая шар плоскость; площадь полученного сечения равна S. Определить поверхность и объем шара.

683. Определить полную поверхность и объем шарового сектора, если в его осевом сечении дуга сегмента равна α, а стягивающая ее хорда равна a.

Комбинации шара с многогранником.

684. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему острым углом α; диагональ большей по площади боковой грани призмы наклонена к плоскости основания под углом β. Определить радиус описанного около данной призмы шара.

685. Сторона основания правильной n-угольной призмы равна a; отрезок, соединяющий центр одного основания призмы с вершиной другого ее основания, образует с осью призмы угол α. Найти поверхность шара, описанного около данной призмы.

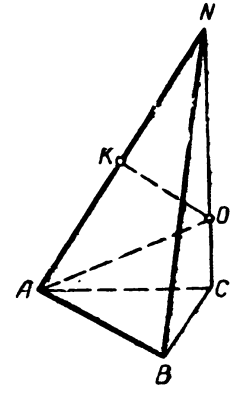


Черт. 46.

686. В шар радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с одной боковой гранью угол α, а с другой — угол β (черт. 46). Найти объем параллелепипеда.

687. В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция, параллельные стороны которой равны a и b, а острый угол равен α. Определить радиус шара, вписанного в данную призму. (Вписанный в призму шар касается всех ее граней.)

688. NC—высота правильной n-угольной пирамиды (черт. 47), AB — сторона ее основания; $AK = KN$, $KO \perp AN$.



Черт 47.

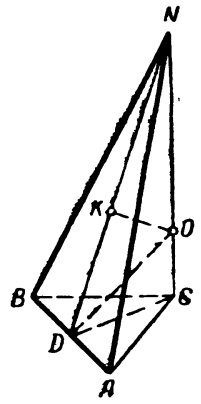
а) Доказать, что точка O находится на равном расстоянии от всех вершин пирамиды и потому будет центром описанного около пирамиды шара.

б) Доказать: 1) если $\angle ANC = \alpha$, то $\angle AOC = 2\alpha$; 2) если $\angle NAC = \alpha$, то $\angle AOC = \pi - 2\alpha$.

в) Найти радиус описанного около

пирамиды шара, если $AB = a$ и $\angle NAC = \alpha$, двумя способами: 1) используя $\triangle NKO$; 2) используя $\triangle AOC$.

689. NC — высота правильной n-угольной пирамиды, AB — сторона ее основания, $\angle NDC$ — линейный угол двугранного угла AB, $\angle NDO = \angle CDO$ (черт. 48).



Черт. 48.

Доказать, что точка O находится на равном расстоянии от всех граней пирамиды (боковых и основания) и является центром вписанного в пирамиду шара.

Найти радиус вписанного в пирамиду шара, если: 1) $AB = a$ и $\angle NDC = \alpha$; 2) $NC = h$ и $\angle DNC = \alpha$; 3) $BC = r$ и $\angle NBC = \alpha$.

690. Радиус шара, описанного около пирамиды $NABC$, равен R. Угол A основания пирамиды равен α, а угол C равен β; боковое ребро NA пирамиды наклонено к плоскости основания под углом γ; все боковые ребра пирамиды равны. Найти объем пирамиды и вычислить при $R = 12{,}0$, $\alpha = 117°$, $\beta = 46°$, $\gamma = 38°$.

Условное изображение заданной комбинации выполнить, принимая во внимание заданные значения параметров.

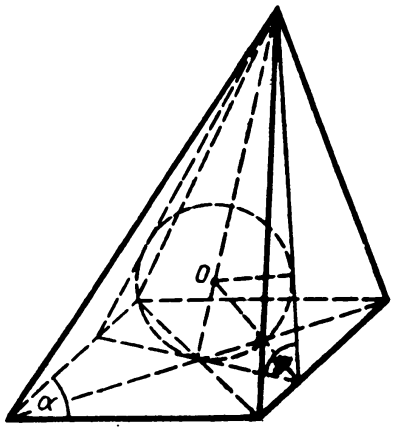
691. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b и наклонено к плоскости ее основания под углом α; через вершину основания пирамиды и центр описанного около нее шара проведено сечение пирамиды, параллельное диагонали основания. Определить площадь полученного сечения.

Можно ли вычислять площадь сечения:

1) при $b = 0{,}0130$ и $\alpha = 67°19'$; 2) при $b = 72$ и $\alpha = 37°$?

692. (Устно.) Шар радиуса R вписан в правильную четырехугольную пирамиду, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность усеченной пирамиды, которая отсекается от данной полной плоскостью, касательной ко вписанному шару и параллельной основанию данной пирамиды.

Указание. Предварительно построить изображение комбинации шара с пирамидой.



Черт. 49.

693. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания пирамиды под углом φ (черт. 49). Найти объем пирамиды.

694. В правильную треугольную пирамиду вписан полушар так, что его больший круг лежит на основании пирамиды, а шаровая поверхность касается всех боковых граней пирамиды. Определить боковую поверхность пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен α, а радиус вписанного полушара равен r.

695. Три равных шара и больший четвертый радиуса R касаются друг друга. Определить радиус меньшего шара, если плоский угол при вершине пирамиды, вершинами которой служат центры четырех данных шаров, равен α.

Комбинации шара, цилиндра и конуса.

696. Из всех цилиндров, вписанных в данный шар, найти тот, который имеет наибольшую боковую поверхность.

697. В конус вписан шар. Найти полную поверхность конуса, если известно, что угол при вершине его осевого сечения равен α, а площадь большого круга шара равна S.

698. В шар вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Сумма высоты конуса и его образующей равна m. Определить объем шара.

699. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α. В конус вписан шар и через их линию касания проведена плоскость. Найти отношения объемов отсеченного проведенной плоскостью конуса и данного.

700. В конус вписан полушар радиуса R так, что большой круг полушара лежит на основании конуса; угол между образующей и плоскостью основания конуса равен α. Определить объем части конуса, заключенной между сферической поверхностью и вершиной конуса.

701. Около шара радиуса R описан усеченный конус, образующая которого составляет угол α с плоскостью боль-

шего основания. Определить объем и боковую поверхность усеченного конуса.

702. В осевом сечении шара и вписанного в него усеченного конуса дуги, стягиваемые диаметрами оснований конуса, равны α и β. Определить боковую поверхность усеченного конуса, если радиус описанного шара равен r.

703. Шара касаются коническая поверхность и плоскость, перпендикулярная к оси конической поверхности. Найти угол в осевом сечении конической поверхности, если полная поверхность полученного конуса равна поверхности шара.

704. Около шара радиуса R описан конус, в котором угол между образующей и плоскостью основания равен α. Определить боковую поверхность конуса.

705. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается шара, равен r. Радиус шара, проведенный в произвольную точку этой окружности, наклонен к ее плоскости под углом α. Найти объем конуса.

706. В конус с радиусом основания R и углом α между образующей и осью конуса вписан шар. Определить объем части конуса, заключенной между сферической поверхностью и вершиной конуса.

707. Полная поверхность конуса, описанного около шара, в n раз больше поверхности шара. Найти наименьшее возможное значение n при помощи введения вспомогательного угла двумя способами: 1) без использования производной; 2) с использованием производной.

Тела вращения.

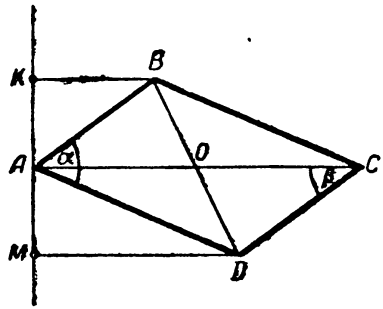
708. Прямоугольный треугольник вращается около оси, проходящей через вершину его острого угла α параллельно противолежащему этому углу катету a. Определить поверхность и объем тела вращения.

709. Равнобедренный треугольник, площадь которого равна S, а угол при вершине равен α, вращается около боковой стороны. Определить поверхность и объем тела вращения.

710. В разностороннем треугольнике ABC угол B равен β, угол C равен γ и сторона AC равна a. Определить объем тела, полученного вращением данного треугольника около оси, проходящей через вершину A параллельно стороне BC.

711. Определить поверхность тела, полученного вращением правильного пятиугольника со стороной a около одной из его сторон.

712. Ромб со стороной a и острым углом α вращается около оси, лежащей в плоскости ромба и проходящей через вершину острого угла перпендикулярно к стороне ромба. Определить поверхность и объем тела вращения.



Черт. 50.

713. Острый угол параллелограмма равен α, большая его диагональ равна d и образует с меньшей стороной угол β. Этот параллелограмм вращается около оси, лежащей в плоскости параллелограмма и проходящей через вершину его острого угла перпендикулярно к большей диагонали (черт. 50). Определить поверхность тела вращения.

714. Диагональ параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, составляет угол β с его меньшей стороной; расстояние между большими сторонами параллелограмма равно d, а его острый угол равен α. Определить объем тела, полученного вращением данного параллелограмма около оси, проходящей через вершину острого угла параллельно диагонали.

715. AB — диаметр полуокружности радиуса R, дуга BC равна α $\left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Через точку C проведена хорда CA и касательная до пересечения с продолжением диаметра в точке D. Определить объем тела, образованного вращением треугольника ACD около оси AD.

§ 4. Дополнительный к главе IX

716. Длины трех ребер параллелепипеда, исходящих из одной его вершины, равны соответственно a, b и c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Определить боковую поверхность и объем параллелепипеда. Исследовать решение.

717. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC $(AB = AC)$, в котором

сторона AB равна a и угол B равен α. Через сторону B_1C_1 верхнего основания призмы и противолежащую ей вершину A нижнего основания проведена плоскость. Определить объем отсеченной от призмы четырехугольной пирамиды и боковую поверхность треугольной отсеченной пирамиды, приняв за основание последней основание призмы, если сечение призмы образует с боковым ребром AA_1 угол φ.

718. От правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и плоским углом при вершине α отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через диагональ основания данной четырехугольной пирамиды параллельно одному из ее боковых ребер.

Определить боковую поверхность отсеченной треугольной пирамиды, приняв за ее основание грань, лежащую на основании данной пирамиды.

719. Найти объем конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и двугранным углом при боковом ребре α.

720. В основании пирамиды лежит прямоугольник, две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, большее боковое ребро наклонено к плоскости основания пирамиды под углом α, угол между диагоналями основания пирамиды равен φ. Данная пирамида вписана в цилиндр так, что ее основание вписано в одно основание цилиндра, а вершина лежит в плоскости другого основания цилиндра. Найти объем пирамиды, если боковая поверхность описанного цилиндра равна S.

721. Касательная к цилиндру наклонена к плоскости основания цилиндра под углом α. Найти расстояние от центра нижнего основания цилиндра до касательной, если его расстояние от точки касания равно d и радиус основания равен R.

722. Сечение, проведенное через две образующие усеченного конуса, составляет с плоскостью основания конуса угол α. Определить площадь сечения, если радиусы оснований конуса R и r $(R>r)$ и образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом β. Исследовать решение.

723. На высоте конуса, равной H, как на диаметре, описан шар. Определить объем части шара, лежащей вне конуса, если угол между образующей и высотой конуса равен α.

724. В основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Одно из боковых

ребер пирамиды перпендикулярно к плоскости основания, а каждое из двух других наклонено к плоскости основания под углом φ. Плоскость, перпендикулярная к основанию пирамиды, дает в сечении с пирамидой квадрат. Найти площадь этого квадрата.

725. Основанием пирамиды $NABCD$ служит квадрат со стороной a, ее боковая грань NAB перпендикулярна к плоскости основания и образует с противоположной боковой гранью NDC двугранный угол α; боковые ребра NA и NB наклонены к плоскости основания пирамиды под одним и тем же углом α. Определить сумму площадей боковых граней NAD и NDC и вычислить при $a = 18{,}7$.

Указание. Значение α определяется из условия задачи.

726. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при стороне ее основания равен α.

Через сторону основания данной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная к противоположной боковой грани. Определить объем отсеченной пирамиды.

Вычислить объем отсеченной пирамиды при $h = 10{,}8$ и $\alpha = 63°21'$.

727. В основании пирамиды $NABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC с углом A при вершине, равным α. Каждое из боковых ребер пирамиды равно a, двугранный угол NA равен β. Определить объем пирамиды.

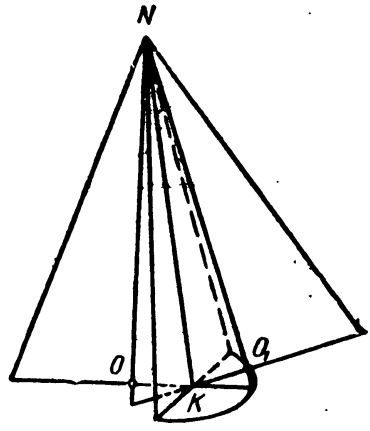
728. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Плоскости, проходящие через вершину пирамиды и диагонали основания, наклонены к плоскости основания под углами φ и γ. Определить объем пирамиды, если ее высота пересекает сторону основания.

729. Определить угол при вершине осевого сечения конуса, на поверхности которого можно провести три взаимно перпендикулярные образующие.

730. Основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция с острым углом α. В призму вписан конус так, что его основание вписано в одно основание призмы, а вершина лежит в плоскости другого основания призмы. Найти полную поверхность призмы, зная, что диаметр основания вписанного конуса равен d, а угол наклона образующей к плоскости основания конуса равен β.

731. Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом α. В основании пирамиды $NABC$, вписанной в данный конус, лежит остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$); боковая грань NBC пирамиды образует с плоскостью основания двугранный угол $NBCA$, равный β; расстояние от вершины A основания пирамиды до противоположной боковой грани равно d. Определить объем пирамиды. Исследовать решение.

732. Два равных конуса с углом α между осью и образующей расположены так, что ось каждого из них лежит на конической поверхности другого (черт. 51). Найти угол между образующими, по которым пересекаются эти конусы.



Черт. 51.

733. В шар радиуса R вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольник; боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под одним и тем же углом α, а одна из боковых граней образует с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды. Исследовать решение.

734. Угол при вершине осевого сечения конуса равен α, а радиус основания конуса равен R. Найти радиус такой сферы с центром в вершине конуса, которая делила бы объем конуса пополам.

735. Радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен r. Двугранный угол, образованный двумя смежными боковыми гранями пирамиды, равен α. Определить объем пирамиды, имеющей вершину в центре шара, а вершины основания в четырех точках касания вписанного шара с боковыми гранями пирамиды.

736. В данный шар вписать конус наибольшего объема.

Указание. Чтобы в *данный* шар вписать требуемый конус, достаточно найти высоту конуса, выразив ее через радиус (R) шара.

Решить двумя способами: 1) без применения тригонометрии, 2) с применением тригонометрии.

737. Определить объем параллелепипеда, все грани которого равные ромбы со стороной a и острым углом α. Исследовать решение.

738. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

739. Периметр основания прямоугольного параллелепипеда равен P, острый угол между диагоналями основания равен α. Через меньшую сторону основания параллелепипеда и середину отрезка, соединяющего точки пересечения диагоналей оснований параллелепипеда, проведена плоскость. Определить площадь полученного сечения, зная, что его плоскость образует с плоскостью основания параллелепипеда двугранный угол φ.

740. Одна из боковых граней пирамиды, в основании которой лежит равносторонний треугольник, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие составляют с ней угол φ. Может ли быть прямым двугранный угол при большем боковом ребре пирамиды и, если может, то при каком значении φ?

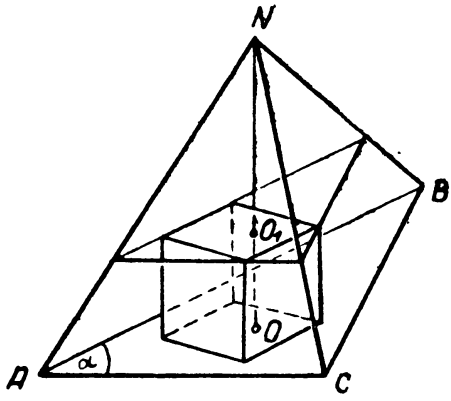
741. В основании пирамиды с равными боковыми ребрами лежит равнобочная трапеция с тупым углом, равным 2α, и боковой стороной, равной меньшему основанию a. Боковая грань пирамиды, опирающаяся на большее основание трапеции, образует с плоскостью основания пирамиды двугранный угол φ. Определить объем пирамиды. Исследовать решение.

742. Основанием пирамиды служит треугольник, в котором одна из сторон равна a, а две другие равны между собой. Боковая грань, проходящая через известную сторону основания, перпендикулярна к плоскости основания пирамиды, а каждое из ограничивающих эту грань боковых ребер наклонено к плоскости основания пирамиды под углом α. В данную пирамиду вписана прямая треугольная призма так, что три ее вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, а три другие — на основании пирамиды. Зная, что равные боковые грани призмы образуют между собой угол β и что в третьей боковой грани призмы основание вдвое больше высоты, найти боковую поверхность вписанной пирамиды.

743. В куб вписан равносторонний цилиндр, образующая которого параллельна диагонали куба. Определить угол между образующей и осью конуса, вершина которого лежит в конце диагонали, параллельной образующей ци-

линдра, и основанием которого является ближайшее к этой вершине основание вписанного цилиндра.

744. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция с острым углом α. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом β. Найти полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в пирамиду шара равен R.

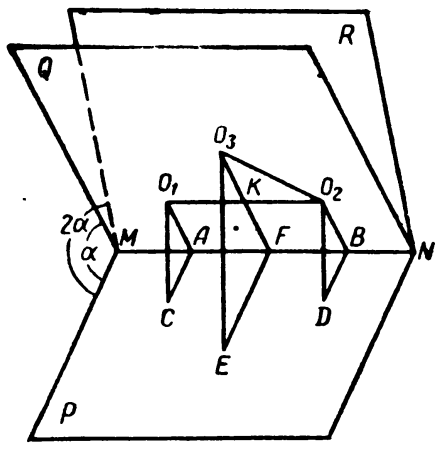


Черт. 52.

745. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим этому катету углом α; вершина пирамиды проектируется в точку, лежащую внутри основания (черт. 52). Найти ребро куба, вписанного в данную пирамиду так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а четыре другие — на боковых гранях пирамиды, зная, что высота пирамиды равна a.

Какое другое положение, по сравнению с изображенным на чертеже 52, может занимать вписанный куб?

746. Около правильной треугольной пирамиды, двугранный угол между боковыми гранями которой равен φ, описан шар. Найти отношение объема пирамиды к объему шара.



Черт. 53.

747. Диагонали параллелограмма, лежащего в основании прямого параллелепипеда, a и b $(a>b)$, образуют между собой острый угол α. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с большей диагональю основания угол β. Найти объем параллелепипеда. Исследовать решение.

748. Два равных шара радиуса R касаются друг

друга и граней двугранного угла, равного 2α. Найти радиус третьего шара, касающегося двух первых и обеих граней данного двугранного угла (черт. 53, где плоскость Q — биссекторная данного двугранного угла).

Какое иное положение, по сравнению с указанным на чертеже, может занимать третий шар?

749. Около данного шара описать конус наименьшего объема.

750. В треугольной пирамиде боковые ребра равны a, b и c, а все плоские углы при вершине — прямые. Определить ребро куба, вписанного в пирамиду так, что одна из вершин совпадает с вершиной пирамиды, а противоположная ей вершина куба лежит на основании пирамиды.

ОТВЕТЫ

Глава I. Тригонометрические функции острого угла

1. в) 1 при $\alpha=90°$; 0 при $\alpha=0°$. **2.** в) 1 при $\alpha=0°$; 0 при $\alpha=90°$. **3.** в) 0 при $\alpha=0°$; г) при $\alpha=90°$. **4.** в) 0 при $\alpha=90°$; г) при $\alpha=0°$. **5.** 7) sin 42°; 8) 1; 9) ctg 37°; 10) tg 71°; 11) 0,5; 12) 1. **6.** 1) минус; 2) плюс; 3) минус; 4) минус; 5) минус; 6) минус. **7.** 1) 0°,27°; 2) 90°, 27°; 3) 63°, 0°; 4) 0°, 21°; 5) 39°, 90°; 6) 71°, 0°; 7) 0°, 77°; 8) 0°, 17°; 9) 0°, 35°; 10) 0°, 15°; 11) 0°, 37°; 12) 11°, 0°; 13) 90°, 0°; 14) 0°, 35°; 15) 0°, 20°; 16) 24°, 54°. **8.** 1) 0°, 70°; 2) 0°, 53°; 3) 0°, 15°; 4) 90°, 53°; 5) 20°, 65°; 6) 0°, 18°; 7) 82°, 37°; 8) 0°, 50°. **9.** 1) $27°<\alpha\leqslant 90°$; 2) $46°<\alpha\leqslant 90°$; 3) $0°\leqslant\alpha<78°$; 4) $0°\leqslant\alpha<35°$; 5) $6°<\alpha\leqslant 45°$; 6) $6°<\alpha\leqslant 23°$; 7) $10°<\alpha\leqslant 20°$; 8) $30°<\alpha<35°$. *Решение.* Из выражения $\operatorname{tg}(3\alpha-15°)$ имеем: $5°\leqslant\alpha<35°$, а из выражения $\operatorname{tg}(\alpha+45°)$: $0°\leqslant\alpha<45°$; следовательно, $5°\leqslant\alpha<35°$. Далее: $3\alpha-15°>\alpha+45°$, откуда $\alpha>30°$. Окончательно: $30°<\alpha<35°$. 9) $0°\leqslant\alpha<21°$; 10) $6°\leqslant\alpha<29°$; 11) $4°\leqslant\alpha<12°$; 12) $36°<\alpha\leqslant 54°$; 13) $0°\leqslant\alpha<5°$; 14) $19°<\alpha\leqslant 61°$; 15) $0°\leqslant\alpha<34°$. **10.** 1) $0\leqslant a\leqslant 1$; 2) $-1\leqslant a\leqslant 0$; 3) $-1\leqslant a\leqslant 0$; 4) $1\leqslant a\leqslant 2$; 5) $0\leqslant a\leqslant 1$; 6) $a>3$; 7) $0\leqslant a\leqslant 1$; 8) $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$; 9) $a\geqslant -1$. **11.** 1) $0°\leqslant\alpha<90°$; 2) $0°<\alpha<90°$; 3) $45°<\alpha<90°$; 4) $0°<\alpha<45°$; 5) $45°<\alpha\leqslant 90°$; 6) $0°<\alpha<45°$. **12.** 1) 3 при $x=90°$, 2 при $x=0°$; 2) 5 при $x=90°$, 4 при $x=0°$; 3) наименьшее 4 при $x=0°$; 4) наименьшее -1 при $x=90°$; 5) наибольшее $a+1$ при $x=90°$, наименьшее a при $x=0°$; 6) наименьшее b при $x=90°$; 7) наибольшее c при $x=90°$, наименьшее $c-1$ при $x=0°$; 8) наименьшее a при $x=0°$. **14.** 1) 50°; 2) 76° 43′; 3) 33° 56′; 4) 64° 11′; 5) 16° 09′; 6) $90°-\alpha$; 7) α; 8) $27°+\alpha$; 9) $33°-\alpha$. **17.** 1) $\cos 51°\,36'$; 2) $\sin 18°\,51'$; 3) $\operatorname{ctg} 42°\,07'$; 4) $\operatorname{tg} 78°\,56'$;

5) $\sin(45°-\alpha)$; 6) $\operatorname{ctg}(72°-\alpha)$; 7) $\cos\alpha$; 8) $\operatorname{tg}(2\alpha+39°)$. **18.** $\frac{1}{2}$, так как $\cos 60° = \sin 30°$. **19.** 1) 5°; 2) 35°; 3) 38°; 4) $0° \leqslant \alpha \leqslant 75°$. **20.** 1) $\sin 53°$; 2) $\operatorname{ctg} 21°$; 3) $\cos 19°$; 4) $\operatorname{tg} 84°$; 5) $\sin 70°$; 6) равны. **21.** 1) $12° \leqslant \alpha \leqslant 19°$; 2) $0° \leqslant \alpha < 5°$; 3) $0° \leqslant \alpha \leqslant 18°$. **23.** 1) 0,2756; 2) 0,4352; 3) 0,8164; 4) 0,1247; 5) 0,8816; 6) 0,0796; 7) 0,9580; 8) 0,3203. **24.** 1) 0,0349; 2) 0,9085; 3) 0,5543; 4) 0,9811; 5) 0,2650; 6) 0,7470; 7) 0,0270; 8) 0,5521. **25.** 1) 0,0699; 2) 1,988; 3) 4,901; 4) 0,8795; 5) 3,890; 6) 0,0825; 7) 2,114; 8) 3,386. **26.** 1) 1,881; 2) 0,0840; 3) 1,934; 4) 3,614; 5) 0,3607; 6) 1,0398; 7) 3,885; 8) 0,2808. **28.** 1) 0,0570; 2) 0,0329; 3) 0,0776; 4) 0,0967; 5) 0,454; 6) 0,954; 7) 0,450; 8) 0,813; 9) 0,675; 10) 0,328; 11) 0,922; 12) 0,265; 13) 4,71; 14) 1,34; 15) 25,6; 16) 1,12. **29.** 1) 0,718; 2) 0,236; 3) 0,0663; 4) 0,806; 5) 0,212; 6) 12,27; 7) 0,736; 8) 2,16; 9) 0,895; 10) 0,503; 11) 25,1; 12) 0,0399; 13) 0,937; 14) 3,92; 15) 0,750; 16) 0,890. **30.** 1) 0,577; 2) 0,816; 3) 0,709; 4) 1,409. **31.** 1) 36°24′; 2) 3°24′; 3) 87°30′; 4) 51°16′; 5) 35°32′; 6) 1°41′; 7)10°50′; 8) 71°58′. **32.** 1) 70°; 2) 17°49′; 3) 54°40′; 4) 85°13′; 5) 33°58′; 6) 72°02′; 7) 53°22′; 8) 85°58′. **33.** 1) 54°13′; 2) 17°29′; 3) 75°43′; 4) 1°52′; 5) 73°35′; 6) 68°58′; 7) 16°01′; 8) 41°30′. **34.** 1) 86°42′; 2) 32°31′; 3) 88°11′; 4) 16°28′; 5) 53°26′; 6) 61°02′; 7) 5°03′; 8) 84°14′. **35.** 1) 25°23′; 2) 49°46′; 3) 45°59′; 4) 69°54′; 5) 49°; 6) 7°; 7) 78°; 8) 18°59′. **36.** 1) 14°25′; 2) 67°37′; 3) 17°32′; 4) 1°37′; 5) 17°55′; 6) 88°11′; 7) 60°25′; 8) 30°27′; 9) 1°47′; 10) 38°07′; 11) 78°18′; 12) 22°46′; 13) 87°23′; 14) 1°11′; 15) 83°49′; 16) 5°00′. **37.** 1) 50°00′; 2) 60°40′; 3) 14°30′; 4) 3°04′; 5) 85°52′; 6) 86°56′; 7) 32°05′; 8) 64°05′; 9) 88°08′; 10) 31°31′; 11) 86°17′; 12) 50°11′; 13) 3°54′; 14) 14°07′; 15) 1°00′; 16) 25°25′.

40.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	(37°)	39°	(47°22′)	50°	33°	(25°)	77°06′	(56°20′)	(26°42′)
B	53°	(51°)	42°38′	(40°)	(57°)	65°	(12°54′)	33°40′	63°18′
a	12,04	7,866	0,4732	7,7	4	0,31	0,841	3,46	329,9
b	15,97	9,714	0,4356	6,4	6	0,66	0,192	2,31	655,9
c	(20)	(12,5)	(0,6432)	(10)	(7)	(0,73)	(0,863)	(4,16)	(734,2)

41.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	35°	(28°)	18°	(26°)	49°	(18°20′)	46°42′	78°30′	(34°45′)
B	(55°)	62°	(72°)	64°	(41°)	71°40′	(43°18′)	(11°30′)	55°15′
a	21,2	0,149	2,46	2,4	0,7	7,76	2,80	34	0,134
b	30,0	0,279	7,60	4,8	0,6	23,4	2,63	7,0	0,194
c	(37)	(0,316)	8	(5,4)	(0,9)	(24,7)	(3,84)	(35)	(0,236)

42. $d \sin \beta$; $d \cos \beta$. **43.** $2b \cos \alpha$; $b \sin \alpha$. **44.** $2a \sin \frac{\alpha}{2}$; $2a \cos \frac{\alpha}{2}$.

45. $a \sin \alpha$; $b \sin \alpha$. **46.** $2R \sin \frac{\alpha}{2}$; $R \cos \frac{\alpha}{2}$. **47.** $2R \sin \frac{180^\circ}{n}$; $R \cos \frac{180^\circ}{n}$; 5,191; 7,989.

49.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	(15°)	32°	52°	(16°43′)	(61°)	69°	46°36′	36°14′	(28°32′)
B	75°	(58°)	(38°)	73°17′	29°	(21°)	(43°24′)	(53°46′)	61°28′
a	(3,7)	27,56	(0,387)	2,153	(0,73)	49	(4,16)	(24,1)	0,335
b	13,81	(44,1)	0,3024	(7,13)	0,40	(19)	3,91	33,0	(0,614)
c	14,30	52,01	0,4911	7,445	0,83	53	5,73	40,8	0,699

50.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	(41°)	65°	(42°15′)	56°	(43°)	62°32′	(17°20′)	(32°45′)	27°40′
B	49°	(25°)	47°45′	(34°)	47°	(27°28′)	72°40′	57°15′	(62°20′)
a	3,74	(8)	(0,821)	(71)	0,37	(6,44)	0,16	(68,3)	22
b	(4,3)	3,73	0,905	48	(0,41)	3,34	(0,53)	106	(41)
c	5,70	8,85	1,22	86	0,56	7,25	0,56	126	46

51. $\frac{h}{\sin \alpha}$; $2h \operatorname{ctg} \alpha$. **52.** $\frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$; $\frac{a}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$. **53.** $\frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$;

$m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. **54.** $\frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta$; $\frac{a-b}{2 \cos \beta}$. **55.** $\frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. **56.** $\frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$;

11,1. **57.** $a \operatorname{tg} \alpha$; $\frac{a}{\cos \alpha}$.

58.

	1	2	3
A	31°27′	54°23′	38°46′
B	58°33′	35°37′	51°14′
a	(12)	11,87	36,95
b	19,62	(8,5)	(46)
c	(23)	(14,6)	(59)

59.

	1	2	3
A	52°20′	31°40′	40°54′
B	37°40′	58°20′	49°06′
a	14,3	(0,42)	(53)
b	(11)	0,681	61,2
c	(18)	(0,8)	(81)

60. Треугольника не существует. **61.** 19°53′; 160°07′. **62.** 9°35′. **63.** 33°45′.

64.

	1	2	3
A	40°11′	54°31′	37°18′
B	49°49′	35°29′	52°42′
a	(38)	(0,54)	(237)
b	(45)	(0,385)	(311)
c	58,90	0,6632	391,0

65.

	1	2	3
A	36°29′	32°45′	51°03′
B	53°31′	57°15′	38°57′
a	(17)	(0,9)	(0,83)
b	(23)	(1,4)	(0,67)
c	28,6	1,66	1,07

66. 41°52′; 48°08′. **67.** 67°40′; 112°20′; $\approx$ 21,2 *см*. **68.** $d \sin \frac{\alpha}{2}$; $d \cos \frac{\alpha}{2}$. **69** $d \operatorname{ctg} \alpha$; $\frac{d}{\sin \alpha}$; $d \sin\alpha$; $d \cos \alpha$. **70.** $\frac{c}{2 \cos \frac{\beta}{2}}$; $c \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\beta}{4}\right)$. **71.** 25°20′; 131°36′. **72.** 154 *мм*. **73.** 81,0; 111. **74.** 3,76 *км*. **75.** 3,07 *м*. **76.** 61°; 29°. **77.** 50°10′. *Указание.* $\operatorname{tg} x = \frac{v_1}{v_2}$, где v_1 — скорость падения капли дождя, v_2 — скорость трамвая. **78.** 2°17′. **79.** 10,0 мин. **80.** 20,6 *м*. **81.** 83,8 *м*. **82.** а) 11°26′; б) 1 : 20. **83.** 130 *м*; 21,0 *м*. **84.** а) 22,5 *кг*; 53°18′; б) 65,1 *кг*; 51,3 *кг*; в) 40,5 *кг*; 46°02′. **85.** 15,1 *кг*; 23,4 *кг*. **86.** 107 *кг*. **87.** а) 11°19′; б) 24,0 *кг*. **88.** 50,4 *кг*. **89.** а) 3°22′; б) 2,5 *мм*. **90.** 100 *м*. **91.** 770 *м*. **92.** 85,0 *м*

Глава II. Углы и дуги произвольной величины

94. 1) 6°; 2) 72°; 3) 360°; 4) 1200°; 5) 4320°; 6) 86°40′; 7) 91 950°. **95.** 1) 30°; 2) 0°,5; 3) 20°; 4) 360°; 5) 720°; 6) 2170°; 7) 11 420°. **96.** 1 час $5\frac{5}{11}$ мин. **97.** 1) 8° и — 20°; 2) 56° и — 140°; 3) 360° и — 900°; 4) 800° и — 2000°. **98.** Угол поворота Земли около оси. **99.** а) не существует; б) 0. **101.** Численно равны при различных единицах измерения. **102.** 360° и 2π; $180° = \pi$. **103.** 1) $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$; 2) $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$; 3) $\frac{\pi}{3} \approx$ $\approx 1{,}05$; 4) $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$; 5) $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$. **104.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$; 5) $\frac{5\pi}{4}$; 6) $\frac{4\pi}{3}$; 7) $-\frac{5\pi}{3}$; 8) $\frac{7\pi}{4}$; 9) $\frac{11\pi}{6}$. **105.** а) 1) $\frac{2\pi}{9}$; 2) $-\frac{3\pi}{5}$; 3) $\frac{11\pi}{12}$; 4) $-\frac{7\pi}{5}$; 5) $\frac{7\pi}{12}$; 6) $\frac{11\pi}{18}$. б) 1) 0,0416; 2) 0,0125;

3) 0,264; 4) 1,22 (по формуле $\frac{\pi\alpha}{180\cdot 60}$, где α—градусная мера угла в минутах). **106.** 1) 0,2007; 2) 1,2997; 3)—1,8457; 4) 5,4321; 5) — 0,0108; 6) 0,0326, **107.** 1) 54°; 2) 315°; 3) 130°; 4) 220°; 5) 150°; 6) 255°; 7) 45°; 8) 180°; 9) 30°; 10) — 60°; 11) 90°; 12) 270°. **108.** а) 1) 67°30′; 2) 75°; 3) — 21°36′; 4) 233°30′; 5) — 213°45′; 6) 132°. б) 1) 123°11′; 2) 19°36′; 3) 1°52′; 4) 16′ (по формуле $\frac{\alpha\cdot 180\cdot 60}{\pi}$, где α — радианная мера угла). **109.** 1) 17°32′; 2) 119°51′; 3) — 299°18′; 4) 4°10′; 5) 34°23′; 6) 23′; 7) 20°58′; 8) — 81°42′; 9) 57°18′. **110.** 1) 0,8415; 2) 0,5402; 3) 1,5577; 4) 0,6420; 5) 0,9511; 6) 0,9659; 7) 0,4142; 8) 0,2679; 9) 0,9424 ($\sin 1{,}23 = \sin 70°28' = 0{,}9424$); 10) 0,9554; 11) 1,0718; 12) 0,8506. **111.** 1) 1 ($1 = \sin 1{,}57 > \sin 1$); 2) 1; 3) tg 1; 4) 1; 5) $\sin 1$ ($0{,}5 = \sin 0{,}52 < \sin 1$); 6) tg 0,8; 7) cos 0,93; 8) ctg 0,72 ($0{,}96 < 1 = \operatorname{ctg} 0{,}79 < \operatorname{ctg} 0{,}72$); 9) cos 1; 10) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; 11) sin 0,7; 12) ctg 0,4. **112.** 1) cos 0,87 (см. № 20); 2) cos 0,57; 3) tg 0,8; 4) ctg 0,85; 5) cos 0,11; 6) tg 0,27; 7) $\sin\frac{5\pi}{12}$; 8) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$. **114.** 17′; 640 *м*. **115.** 0,0552. **117.** а) 10,76 *м*; б) 20 *м*; в) $\approx 2{,}3$ 131°12′; г) 0,3281; 18°48′. **118.** а) 1) $T = \frac{2}{15}$ сек., $\omega = 15\pi \frac{1}{\text{сек.}}$; 2) $T = \frac{1}{40}$ сек., $\omega = 80\pi \frac{1}{\text{сек.}}$; 3) $T = 1$ сек. $\omega = 2\pi \frac{1}{\text{сек.}}$. б) $16{,}8\pi \approx 52{,}7 \left(\frac{\partial м}{сек.}\right)$. в) $T = \frac{\pi}{25}$ сек., $\omega = 50 \frac{1}{\text{сек.}}$. **119.** а) 1) 3′,6 = = 3′36″; 2) 1°37′12″; 3) 18°14′24″. б) 1) 0 — 17; 2) 1 — 20; 3) 0—10; 4) 0— 06. **120.** а) 429 *м*; б) $\approx$ 162 *м*, в) 0 — 90; 0 — 60; 0 — 30. **121.** $\frac{4d}{9} = 40° = \frac{2\pi}{9}$; $\frac{2d}{3} = 60° = \frac{\pi}{3}$; $\frac{8d}{9} = 80° = \frac{4\pi}{9}$. **122.** а) 1) 2 часа 41 мин.; 2) 8 час. 57 мин. 46 сек.. б) 1) 40°03′; 2) 159°02′30″. **123.** 1) 24°46′; 2) угла не существует; 3) 61°23′; 4) 6°59′. **124.** Не следует понимать как радианную меру угла, следует понимать как отвлеченные числа. **125.** В геометрии под словом «угол» понимается геометрическая фигура — геометрический образ, в тригонометрии под словом «угол» понимается численная мера угла (мера поворота луча). **126.** Допустима; ее следует понимать как сокращенную запись фразы: «Угол в $\frac{3\pi}{5}$ радианов равен углу в 108°». **127.** $30° = \frac{\pi}{6}$ и $60° = \frac{\pi}{3}$. **128.** Понимать в том смысле, что центральный угол и дуга, на которую он опирается, измеряются равными числами в единицах од-

ного названия; неприменимо, когда единицей измерения угла берется прямой угол. **132.** а) 470°; 830°. Арифметической; 360°. б) $\alpha = 110° + 360° k$; 1910°. 2630°. **133.** а) — 250°; — 610°. Арифметической; —360°. б) $\alpha = 110° - 360° n$; 110°; — 970°; — 1690°. **134.** а) — 610°; — 1330°. б) —610°; —1330°. в) При отрицательных. **135.** $-\frac{11\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$. **136.** 1) $60 + 360°n$ и $\frac{\pi}{3} + 2n\pi$; 2) $120° + 360°n$ и $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$; 3) $240° + 360° m$ и $\frac{4\pi}{3} + 2m\pi$; 4) $300° + 360° k$ и $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$; 5) $360°m$ и $2m\pi$; 6) $90° + 360°n$ и $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$; 7) $180° + 360°n$ и $\pi + 2n\pi = \pi(2n + 1)$; 8) $270° + 360° n$ и $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$. **137.** а) 1) $140° + 360° n$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; 3) $230° + 360°m$; 4) $\frac{6\pi}{7} + 2k\pi$. б) 1) $\alpha = 80° + 180°n$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; 3) $\alpha = \frac{2\pi}{3} + m\pi$; 4) $\alpha = 20° + 120°k$; 5) $-50° + 180° n$ **138.** При $R=1$. **139.** 1) 0,4334; 2) 0,9044; 3) 0,4567; 4) 0,0842; 5) 1,5350; 6) 0,0314. **142.** 1) $2k\pi$ (основную дугу 0 не пишут, получается при $k=0$); 2) $\pi + 2k\pi = \pi(2k + 1)$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$; 4) $\frac{3\pi}{2} + 2m\pi = \frac{\pi}{2}(4m + 3)$. **143.** $\alpha = n\pi$. **144.** $\alpha = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$. **145.** $\frac{n\pi}{2}$. **146.** —11,56; —5,28; 1; 7,28; 13,56. **147.** Точкой числовой оси изображается единственное действительное число, точкой единичной окружности изображается бесконечное множество действительных чисел—членов бесконечной двухсторонней арифметической прогрессии с разностью 2π. **148.** а) 0° и 90° — I; 90° и 180° — II; 180° и 270°—III; 270° и 360° — IV. б) 0 и $\frac{\pi}{2}$ — I, $\frac{\pi}{2}$ и π — II, π и $\frac{3\pi}{2}$ — III, $\frac{3\pi}{2}$ и 2π — IV. в) 0 и 1,57 — I; 1,57 и 3,14 — II; 3,14 и 4,71 —III; 4,71 и 6,28 — IV. **149.** —270° и — 360°, $-\frac{3\pi}{2}$ и -2π. — 4,71 и — 6,28 (I ч.); — 180° и 270°, $-\pi$ и $-\frac{3\pi}{2}$, — 3,14 и — 4,71 (II ч.); —90° и — 180°, $-\frac{\pi}{2}$ и $-\pi$, —1,57 и — 3,14 (III ч.); 0° и —90°, 0 и $-\frac{\pi}{2}$, 0 и — 1,57 (IV ч.). **150.** 1) II; 2) IV; 3) II; 4) I; 5) III; 6) III; 7) I; 8) III; 9) III; 10) III; 11) IV; 12) II; 13) I; 14) IV; 15) IV. 16) II; 17) II; 18) I. **151.** II; IV; I; II; IV.

Глава III. Тригонометрические функции

153. Абсциссой точки называется действительное число, измеряющее отрезок оси абсцисс от начала координат до проекции данной точки на эту ось. Абсциссой точки называют также соответствующий отрезок оси абсцисс (геометрический образ этого числа) или равный ему отрезок перпендикуляра, опущенного из данной точки на ось ординат, от этой оси до данной точки; иногда абсциссой точки называют ее проекцию на ось абсцисс. Называя, однако, абсциссой точки отрезок или точку оси абсцисс, каждый раз подразумевают число, ими изображаемое. Аналогично определяется ордината точки.

155. IV; I; III; II. 158. 1) 1; 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha$; 4) 1; 5) $\sin\alpha$; 6) 1; 7) $\cos\alpha$; 8) 1; 9) $\cos\alpha$; 10) $\operatorname{tg}\alpha$; 11) $\operatorname{cosec}\alpha$; 12) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$; 13) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$; 14) 1. 159. а) При совпадении с осью ординат; б) при совпадении с осью абсцисс; в) при совпадении с осью ординат; г) при совпадении с осью абсцисс. 160. а) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$; $\sec\alpha=-\frac{5}{3}$; $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{5}{4}$. 165. $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$ или $|\cos\alpha|\leqslant 1$; $-1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$ или $|\sin\alpha|\leqslant 1$. 166. 1) $y_{\max}=7$ при $\sin x=1$, $y_{\min}=-1$ при $\sin x=-1$; 2) $y_{\max}=7$ при $\cos x=-1$, $y_{\min}=-3$ при $\cos x=1$; 3) $y_{\max}=5$ при $\sin x=0$, $y_{\min}=4$ при $\sin x=\pm 1$; 4) $y_{\max}=5$ при $\cos(\alpha-15^\circ)=1$, $y_{\min}=3$ при $\cos(\alpha-15^\circ)=-1$; 5) $y_{\max}=3$ при $\sin(\alpha-\beta)=-1$, $y_{\min}=1$ при $\sin(\alpha-\beta)=1$; 6) $y_{\max}=b$ при $\sin x=0$, $y_{\min}=a$ при $\sin x=\pm 1$; 7) $y_{\max}=4$ при $\sin x=0$. $y_{\min}=1$ при $\sin x=\pm 1$; 8) $y_{\max}=1$ при $\cos x=\pm 1$, $y_{\min}=\frac{1}{2}$ при $\cos x=0$. 167. $\operatorname{tg}\alpha$ может принимать значение любого действительного числа, $|\operatorname{tg}\alpha|>0$. 168. 1) Нет; 2) имеет наименьшее 0; 3) имеет наименьшее 0. 169. $\operatorname{ctg}\alpha$ может принимать значение любого действительного числа, $|\operatorname{ctg}\alpha|>0$. 170. 1) Нет; 2) имеет наименьшее 0; 3) имеет наименьшее 0. 171. 1), 4), 7), 9) — могут иметь синус, косинус, тангенс и котангенс; 2), 3), 5), 6), 8) — тангенс, котангенс, секанс и косеканс. 175. а) I, III; б) I, IV; в) I, II; г) во всех. 176. а) II, IV; б) III, IV; в) II, III. 178. 1) +; 3) +; 4) +; 5) +; 6) —; 7) —; 8) —; 9) —; 10) —; 11) —; 12) +; 13) —; 14) +. 179. 1) +; 2) —; 3) +; 4) —; 5) +; 6) —; 8) —; 9) —. 182. 1) II или III; 2) I или III; 3) II или IV; 4) III или IV; 5) I или IV; 6) II или IV; 7) угла не существует; 8) I или III. 183. 1) I или II при $0<a<1$ и III или IV при $-1<a<0$; 2) I или III при $a>0$ и II или IV при $a<0$; 3) I или IV при $0<a<1$ и II или III при $1<a<2$; 4) I или III при $a>-2$ и II или IV при $a<-2$. 185. 1) $\cos 18^\circ$;

2) $-\sin 100°$. 3) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; 4) $-\operatorname{ctg} 2$; 5) $\sin^2\frac{\pi}{5}$; 6) $|\operatorname{tg}(\alpha-16°)|$; 7) $\cos\left(\frac{\pi}{7}-\alpha\right)$; 8) $\operatorname{ctg}^2(\beta-2)$. **186.** 1) $2\sin(\alpha-15°)$; 2) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ или $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; 3) 0; 4) $2\operatorname{ctg}^2(\varphi-34°)$ или $2\operatorname{ctg}^2(34°-\varphi)$. **187.** 2) Четная, 1) нечетная, 3), 4) ни четная ни нечетная. **192.** 1) 0; 2) 0; 3) a 4) $(a-b)^2=(b-a)^2$; 5) 5; 6) 1. **193.** 1) 0; 2) 0; 3) 2; 4) 0. 5) 1; 6) c. **195.** *Указание.* Использовать зависимость между функциями дополнительных углов. **197.** 1) 2; 2) 1; 3) $\sqrt{2}$; 4) 0; 5) 1; 6) $-\sqrt{2}$; 7) 1; 8) 0. **198.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) -1; 4) 0. **199.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $-\cos^2\beta$; 3) 1; 4) $\cos^2 x$; 5) 1; 6) $\sin y$; 7) $-\sin^2\alpha$; 8) $\operatorname{ctg}^2 z$; 9) $-\operatorname{tg}^2\beta$; 10) $\operatorname{cosec}^2\varphi$; 11) $\operatorname{tg}\beta$; 12) 1; 13) 1; 14) 1; 15) $\operatorname{cosec}^2 x$; 16) 1; 17) 1; 18) $\cos^2\alpha$; 19) $\sin^2\alpha$. **200.** 1) I или IV; 2) III или IV; 3) I или III; 4) II или IV. **201.** $\operatorname{tg}\alpha$, если α — угол I или III четверти; $-\operatorname{tg}\alpha$, если α — угол II или IV четверти; 2) $\sin\alpha$, если α — угол I или IV четверти; $-\sin\alpha$, если α — угол II или III четверти; 3) $\cos\alpha$, если α—угол I или II четверти; $-\cos\alpha$, если α—угол III или IV четверти; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$, если α — угол I или III четверти; $-\operatorname{ctg}\alpha$, если α — угол II или IV четверти. **204.** а) 1) $\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $\pm\frac{5}{13}$. б) 1) $\pm\frac{5}{13}$; 2) $-\frac{3}{\sqrt{13}}$; 3) $-\frac{4}{\sqrt{17}}$. в) 1) $\sqrt{\frac{2}{7}}$; 2) $-\frac{4}{3}$; 3) $\frac{b}{a}(a\neq 0)$. г) 1) $\pm\frac{4}{3}$; 2) $-\frac{5}{12}$; 3) $-\frac{5}{2}$.

205.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sin x$	$-\frac{a}{b}$	$\frac{24}{25}$	$\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$	$-\frac{24}{25}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	$\pm\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\cos x$	$\pm\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$	$-\frac{7}{25}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{7}{25}$	$-\frac{5}{13}$	$\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$	$\pm\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$	$\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
$\operatorname{tg} x$	$\pm\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$	$-\frac{24}{7}$	2	$\frac{24}{7}$	$-\frac{12}{5}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\operatorname{ctg} x$	$\pm\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{24}$	$-\frac{5}{12}$	k	$\frac{c}{b}$	$\sqrt{2}$

206. 1) 1; 2) $1+\cos\alpha$; 3) $\cos\alpha-\sin\alpha$; 4) $-(1+\sin\alpha)$; 5) $\sin\alpha-\cos\alpha$; 6) 1. **207.** $1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. **208.** $\sin^2\alpha$ **209.** 2. **210.** 1. **211.** 1) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

(I и IV четверти) и $-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ (II и III четверти); 2) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ (I и II четверти), $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$ (III и IV четверти); 3) $\sin\alpha$ (I и IV четверти), $-\sin\alpha$ (II и III четверти); 4) $\cos\alpha$ (I и II четверти), $-\cos\alpha$ (III и IV четверти). **212.** *Указание.* Рационально подобрать для числителя и знаменателя дроби такой дополнительный множитель, чтобы после перемножения в числителе или в знаменателе выполнялось сокращение дроби, например: 3) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sec\alpha-\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sec\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$ $=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; такие преобразования легко выполняются устно (без записей). 1) $\sec\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$; 3) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; 4) $\cos\alpha$; 5) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **213.** 1) $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; 3) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. **214.** 1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$. **224.** 0,2. **225.** $\frac{1-r^2}{2}$. **226.** $s(s^2-3)$. **227.** 1) $y_{\max}=3$, $y_{\min}=-2$; 2) $y_{\max}=2$, $y_{\min}=1$. **228.** 1) $x+2=y^2$; 2) $x(3-x^2)=2y$. **229.** 1) 0,9963; 2) 0,9999; 3) 0,9991. **231.** а) $\arcsin m$ при $-1\leqslant m<0$; $\operatorname{arctg} m$ при $m<0$. б) $\arccos m$ при $-1\leqslant m<0$; $\operatorname{arcctg} m$ при $m<0$. **223.** а) 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{\pi}{2}$; 6) $\frac{\pi}{6}$; 7) 0; 8) $\frac{\pi}{2}$. б) 1) 33°47′; 2) 31°34′; 3) 68°45′; 4) 43°41′; 5) не существует; 6) не существует. в) 1) $0{,}0536\approx3°04'$; 2) $0{,}0079\approx27'$; 3) $0{,}0036\approx12'$; 4) $0{,}0749\approx4°17'$. **234.** $A=\arcsin\frac{a}{c}$; $B=\arccos\frac{a}{c}$. **235.** $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{a}{b}$; $\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{b}{a}$. **236.** а) $\alpha=\arccos\frac{a}{2c}$; $\beta=2\arcsin\frac{a}{2c}$; б) $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{2h}{a}$; $\beta=2\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{2h}$. **237.** 1) $\arcsin 0{,}6\approx36°52'$; 2) $\arcsin 0{,}8\approx53°08'$. **238.** 1) $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin a<0$ при $-1\leqslant a<0$; 2) $\frac{\pi}{2}<\arccos a\leqslant\pi$ при $-1\leqslant a<0$; 3) $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}a<0$ при $a<0$; 4) $\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,ctg}a<\pi$ при $a<0$. **239.** а) $\arcsin(-a)=-\arcsin a$; б) $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$; в) $\operatorname{arc\,tg}(-a)=-\operatorname{arc\,tg}a$; г) $\operatorname{arc\,ctg}(-a)=\pi-\operatorname{arc\,ctg}a$. **240.** а) 1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) π; 7) $\frac{5\pi}{6}$; 8) $-\frac{\pi}{3}$; 9) $-\frac{\pi}{6}$; 10) $\frac{2\pi}{3}$;

11) $-\frac{\pi}{6}$; 12) $\frac{5\pi}{6}$; 13) $-\frac{\pi}{3}$; 14) $\frac{2\pi}{3}$. б) 1) Не существует; 2) $-16°03'$; 3) $136°19'$; 4) $124°51'$; 5) $-63°26'$; 6) $125°$. в) 1) $-0{,}0274 \approx \approx 1°34'$; 2) $-0{,}0083 \approx -29'$; 3) $-0{,}0067 \approx -23'$; 4) $-0{,}0832 \approx -4°45'$. 241. 1) $\pm\frac{\pi}{6}+2n\pi$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; 3) $\pm\frac{\pi}{6}+m\pi$; 4) $\pm 44°33'+$ $+360°n$; 5) $60°+360°k$ и $-176°+360°k$; 6) $k\pi$; 7) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 8) $\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$ и $\pm\frac{5\pi}{6}+2m\pi$. 242. 1) $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ и $-\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1)$; 2) $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ и $\frac{\pi}{3}+\pi(2n+1)$; 3) $-\frac{\pi}{8}+m\pi$ и $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 4) $\frac{\pi}{2}+2m\pi$ и $-\frac{\pi}{2}+2m\pi$ или $\frac{\pi}{2}(4k\pm 1)$ или $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 5) $-11°+$ $+120°n$ и $11°+60°(2n+1)$; 6) $n\pi$; 7) $1°35'+360°n$ и $-1°35'+$ $+180°(2n+1)$. 243. 1) $-\frac{\pi}{3}+n\pi$; 2) $0{,}0057+3{,}142n$; 3) $n\pi$ и $-71°34'+180°n$; 4) $-29°+60°m$. 244. 1) $\frac{2\pi}{3}+n\pi$; 2) $38°31'+$ $+180°m$; 3) $\frac{\pi}{4}+m\pi$ и $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; 4) $90°(2k+1)$ и $11°19'+180°k$. 245. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) 0; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) π; 6) $\frac{3\pi}{4}$; 7) 0; 8) $\frac{\pi}{6}$; 9) $\frac{\pi}{6}$. 246. 1) $\arcsin 1$; 2) 1; 3) 1; 4) $\operatorname{arcctg} 0$. 249. $\sin\alpha=-\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$; $\cos\alpha=-\frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b^2}{a^2}$. 250. а) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{m^4-1}}{m^2}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{m^4-1}}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{m^4-1}$; при $|m|>1$; б) $\sec\alpha=\pm$ $\pm a$ при $|a|\geqslant 1$. 252. 1) $\arccos a$ и $\operatorname{arcctg} a$; 2) любым. 254. 1) $|a|<1$; 2) $|a|<1$; 3) $|a|>0$; 4) $|a|>0$. 255. 2) Не существует; 5) $\frac{1}{2}$; 6) не существует; 7) 1; 8) не существует; 9) $\frac{4}{5}$. *Указание.* $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}$; 10) $\frac{12}{5}$; 11) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 12) $\frac{3}{4}$; 13) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; 14) $\frac{5}{13}$; 15) $\frac{4}{5}$; 16) $\frac{12}{5}$; 17) $-\sqrt{3}$; 18) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

19) -1; 20) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 256. 1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) 1; 3) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$; 4) 1; 5) $\frac{2}{\sin\alpha}$ (I и II ч.), $-\frac{2}{\sin\alpha}$ (III и IV ч.). 258. 1) 2,5; 2) 0,5; 3) 2. 259. а) $-\frac{17}{31}$; б) 0,64. 261. 4) 3,04 и 9,27 *м*. 262. 1) $2n\pi$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; 3) $-\frac{\pi}{4}+2m\pi$ и $\frac{\pi}{4}+\pi(2m+1)$; 4) $-77^\circ+180^\circ n$; 5) $-\frac{\pi}{6}+k\pi$ и $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 6) $\pm\frac{\pi}{12}+k\pi$ и $\pm\frac{5\pi}{12}+k\pi$; 7) $-\frac{\pi}{2}+2m\pi$; 8) $2k\pi$; 9) $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ и $-\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1)$. *Указание.* Решается способом приведения к одной функции. 10) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 11) $n\pi$ и $-\frac{\pi}{2}+2n\pi$; 12) $-40^\circ+180^\circ n$ и $-13^\circ26'+180^\circ n$. *Указание.* Решается способом разложения на множители.

Глава IV. Теоремы сложения и их следствия

264. 1) -5; 5; 2) 4; 4; 3) -2; 2; 4) 2; 2. 265. а) $M(6,7)$, $N(-2,1)$; -8, -6; 8, 6; 10. б) $M(-2,-2)$, $N(4,6)$; 6, 8; 6, 8; 10. в) $M(-8,2)$, $N(4,-3)$; 12, -5; 12, 5; 13. 267. Как следствие теоремы о косинусе разности двух аргументов. 268. $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. 269. $\frac{16}{65}$. 270. $\sqrt{3}\cos\alpha$. 271. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$. 273. 1) $-\frac{16}{65}$. Решение. $\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}+\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}\right)=\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}\right)-$

$-\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}\right)=\cos\left(\arccos\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)-$

$-\frac{12}{13}\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\frac{5\cdot4}{13\cdot5}-\frac{12\cdot3}{13\cdot5}=-\frac{16}{65}$. 2) $\frac{77}{85}$.

274. Сумму любых двух острых углов, которая может быть углом первой или второй четверти, всегда можно выразить через $\arccos m$ или $\operatorname{arc\,ctg} m$; разность двух острых углов может быть или углом первой четверти или отрицательным углом четвертой четверти и выражается

через $\arcsin m$ или $\operatorname{arctg} m$. 275. 1) $\arccos\left(-\frac{36}{325}\right)=96°22'$. Р е ш е н и е. $\cos\left(\arccos\frac{7}{25}+\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)=\ldots=-\frac{36}{325}$, следовательно, $\arccos\frac{7}{25}+\operatorname{arctg}\frac{5}{12}=\arccos\left(-\frac{36}{325}\right)=180°-\arccos\frac{36}{325}=180°-$ $-83°38'=96°22'$. 2) $\arccos\frac{36}{85}=64°57'$; 3) $\arccos\left(-\frac{140}{221}\right)=129°18'$. 276. $\frac{\pi}{6}(2k+1)$. 278. $\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}{4}$. 279. а) $-\frac{84}{85}, \frac{36}{85}$; б) $\frac{36}{85}$, если α — I ч. и β — II ч. или α — II ч. и β — III ч.; $-\frac{84}{85}$, если α и β — II ч. или α — I ч. и β — III ч. 280. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$. 282. 1) 0. *Указание.* Предварительно надо изменить знак отрицательного числа, определяющего значение главного угла на противоположный, см. № 239. 2) $\frac{33}{65}$. 283. 1) $\arcsin\frac{16}{65}$; 2) $-\arcsin\frac{13}{85}$. 284. $\frac{n\pi}{2}$. 286. $-(2+\sqrt{3})$. 287. -7. 288. $\frac{a-1}{a+1}$. 290. 1) $-\frac{33}{56}$; 2) $-\frac{16}{63}$. 291. 1) $-\operatorname{arctg}\frac{16}{63}$; 2) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{36}{77}\right)$; 3) $-\operatorname{arcctg}\frac{21}{220}$. 4) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{33}{56}\right)$; 5) $\frac{3\pi}{4}$. 292. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} 3\alpha$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) 1; 6) 1; 7) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; 8) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; 9) $\frac{1}{2}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 12) $\frac{1}{2}$; 13) $\sin 2\alpha$; 14) 0; 15) $\sin 2\beta$; 16) 1; 17) $\cos\alpha\cos\beta$; 18) $\cos 2\alpha$; 19) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$; 20) 1. 293. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{24\sqrt{3}-7}{50}$. 294. 1) $\sqrt{3}$; 2) 0; 3) $\sin 2\alpha$. 297. б) 1) $-410°$; 2) $276°$; 3) $-\frac{19\pi}{14}$; 4) $\frac{7\pi}{3}$; 5) $-3630°$; 6) $\approx 5{,}57$. 301. 1) $\arccos 0{,}3$; 2) $\arcsin\frac{4}{11}$; 3) $\operatorname{arcctg} 3$; 4) $\operatorname{arctg} k$ 302. 1) $a+b=1-ab$; 2) $a(1+b\sqrt{3})=b-\sqrt{3}$. 300. 1) $\frac{\pi}{2}+$ $+2n\pi$; 2) $k\pi-\frac{\pi}{4}$; 3) $2n\pi$ при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$, x—произвольно

число при $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **310.** Решение. $a\left[\sin\alpha + \right.$

$\left. + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)\cos\alpha\right] = \frac{a\left[\sin\alpha\cdot\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) + \cos\alpha\cdot\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)\right]}{\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)} =$

$= \frac{a\cdot\sin\left(\alpha + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)}{\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) & \text{при } a > 0, \\ -\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) & \text{при } a < 0; \end{cases}$

$\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$. **311.** 1) $5\sin\left(\alpha + \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)$; 2) $2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $\sqrt{1+a^2}\sin(\alpha - \operatorname{arc\,ctg} a)$; 4) $\sqrt{1+k^2}\sin(\alpha + \operatorname{arc\,tg} k)$;

5) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$. **312.** 1) $y_{\max} = \sqrt{5}$, $y_{\min} = -\sqrt{5}$;

2) $y_{\max} = \sqrt{a^2+b^2}$, $y_{\min} = -\sqrt{a^2+b^2}$; 3) $y_{\max} = 3$, $y_{\min} = -3$. **313.** 1) $2k\pi$

и $\frac{\pi}{2}(4k+1)$; 2) $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; 3) $180^\circ n - 56^\circ 19'$; 4) $\frac{\pi}{4} + n\pi$; 5) $x =$

$= -\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \operatorname{Arc}\sin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, условие $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$, откуда $c^2 \leqslant a^2 +$

$+ b^2$. **314.** 1) $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $y_{\min} = -\sqrt{2}$ при $x =$

$= -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi$; 2) $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $y_{\min} = 0$ при $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$.

315. Не может. **316.** Решение. $y = \frac{2+\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{3}\sin x} > 0$ при $0 < x < \pi$;

$\sqrt{3}\,y\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$; $\sqrt{3(1+y^2)}\sin(x - \operatorname{arc\,ctg} y) = 2$;

$\sin(x - \operatorname{arc\,ctg} y) = \frac{2}{\sqrt{3(1+y^2)}} \leqslant 1$, откуда $4 \leqslant 3 + 3y^2$, $y \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_{\min} = \frac{3}{\sqrt{3}}$.

317. 23°. **318.** $\frac{a}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$; на серединах сторон данного квадрата

при $\alpha = 45^\circ$. **319.** Провести прямую под углом A к катету a (или под углом B к катету b); два решения. **320.** $b\sqrt{3}$ при $x = \frac{\pi}{3}$. *Указание.* Находить наименьшее значение переменного множителя $\frac{2-\cos x}{\sin x} = z > 0$, так как постоянная b на изменение этого мно-

жителя не влияет. **321.** $\frac{Pk}{\sqrt{1+k^2}\sin(\alpha+\operatorname{arc\,ctg} k)}$; наименьшее при $\alpha = \operatorname{arc\,tg} k = \rho$; при уменьшении α от ρ до $0°$ и при возрастании от ρ до $90°$ действующая сила возрастает, принимая наибольшее значение при $\alpha = 90°$, равное P. **322.** Как следствия теорем сложения аргументов. **323.** 1) $-\sin 70°$; 2) $-\cos 20°$; 3) $\operatorname{tg} 40°$; 4) $-\operatorname{ctg} 43°$; 5) $-\operatorname{tg} 33°$; 6) $-\sin 84°$; 7) $\operatorname{ctg} 77°$; 8) $-\cos 36°$; 9) $-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{10}$; 10) $\cos\frac{3\pi}{8}$; 11) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; 12) $\sin\frac{5\pi}{11}$; 13) $\cos 1{,}14$; 14) $-\sin 1{,}28$; 15) $\operatorname{ctg} 1{,}43$; 16) $-\operatorname{tg} 1{,}51$. **324.** 1) $-\operatorname{ctg} 47°$; 2) $-\operatorname{tg} 27°$; 3) $-\sin 21°$; 4) $\cos 79°$; 5) $-\sin\frac{\pi}{10}$; 6) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{18}$; 7) $-\cos\frac{\pi}{14}$; 8) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}$; 9) $-\operatorname{tg} 0{,}54$; 10) $-\sin 0{,}7$; 11) $-\cos 1{,}29$; 12) $\operatorname{ctg} 0{,}29$. **325.** 1) $-\cos 20°$; 2) $-\sin 31°$; 3) $\operatorname{ctg} 13°$; 4) $-\operatorname{ctg} 44°$; 5) $\sin\frac{2\pi}{5}$; 6) $-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}$; 7) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}$; 8) $\sin\frac{\pi}{8}$; 9) $-\operatorname{tg} 0{,}26$; 10) $\cos 0{,}64$; 11) $-\cos 0{,}51$; 12) $\operatorname{ctg} 0{,}39$. **326.** 1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $-\sin\alpha$; 3) $-\cos\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\alpha$; 5) $-\cos\alpha$; 6) $\cos^2\alpha$; 7) $|\operatorname{tg}\alpha|$; 8) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **327.** 1) 0,8910; 2) $-1{,}732$; 3) 0,5543; 4) $-0{,}940$; 5) $-0{,}4142$; 6) $-0{,}951$; 7) 0,3827; 8) 3,73; 9) $-0{,}8253$; 10) 3,35; 11) $-0{,}1888$; 12) $-0{,}01$. **328.** 1) $\cos^2 17°$; 2) 0; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sin^2\frac{\pi}{5}$; 5) 0; 6) $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)$; 7) $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

330. Примерное доказательство. 2) $\cos\varphi = -\cos(\pi-\beta) = -\cos(\alpha+\gamma)$; формулировка: «Если сумма трех углов равна π, то косинус одного из этих углов равен косинусу суммы двух других углов, взятому с противоположным знаком». **335.** $\operatorname{arc}\cos\frac{m-n}{2n}$ и $\operatorname{arc}\cos\frac{n-m}{2n}$ при $n < m < 3n$. **336.** $\operatorname{arc}\sin\frac{2s}{mn}$ и $\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{m^2n^2-4s^2}}{mn}\right)$ при $2s \leqslant mn$. **338.** 1) x — произвольное число ($-\sin x = -\sin x$; $0\cdot\sin x = 0$); 2) $n\pi+\frac{\pi}{4}$; 3) x — произвольное число, кроме значений $x = n\pi$; 4) $2k\pi$; 5) x — произвольный угол, исключая углы вида $110° + 180°n$; 6) $n\pi+\frac{\pi}{4}$. **339.** 1) II, III; 2) I; 3) II, III; 4) I; 5) I, IV; 6) II; 7) II; 8) I, IV; 9) IV;

10) II III; 11) II, III; 12) III. *Указание.* При решении примеров данной задачи следует иметь в виду формулы общего вида углов и что $\frac{\pi}{4} = 45^\circ = \operatorname{arc\,tg}\, 1 = \operatorname{arc\,ctg}\, 1 \approx \arcsin 0{,}7 \approx \arccos 0{,}7$. Например (пример 1): $\alpha_1 = \arcsin 0{,}8 + 2k\pi$. $2\alpha_1 = 2\arcsin 0{,}8 + 2 \cdot 2k\pi$, $2\arcsin 0{,}8 > 2\arcsin 0{,}7 \approx \frac{\pi}{2}$, следовательно, 2) α_1 — угол второй четверти (второе слагаемое $2 \cdot 2k\pi$ не меняет положения конечной стороны углов $2\alpha_1$); так же $2\alpha_1 = -2\arcsin 0{,}8 + 2\pi(2k+1)$, где $-2\arcsin 0{,}8$ суть угол III четверти. **340.** 1) 0,96 (I ч.), — 0,96 (IV ч.); 2) $\frac{4}{3}$ (III ч.). **341.** 1) $\frac{120}{169}$; 2) 0,28. **342.** $-\frac{836}{845}$; $-\frac{253}{325}$. **343.** —0,28. **344.** 1) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \pm 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **345.** $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **346.** 1) 1; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\sin 2\alpha$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 2; 7) $2\operatorname{ctg}\alpha$; 8) 1; 9) $\cos 2\alpha$; 10) 1; 11) $\operatorname{tg}\alpha$; 12) 1; 13) $\sin\alpha$; 14) $-\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$; 15) $\cos 4\alpha$; 16) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 17) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 18) $-\sin 2\beta$; 19) $\frac{1}{2}\sin\alpha$; 20) $\frac{1}{2}$; 21) $\cos 2\alpha$; 22) $-\operatorname{ctg} 2\alpha$. **347.** 1) $-\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$; 3) $\frac{1}{4}$. *Указание.* Умножить и разделить данное выражение на $2\sin\frac{\pi}{5}$. 4) $\cos 4\alpha$; 5) $\sin 2\alpha$. **349.** 1) $y_{max} = 5$ при $x = n\pi - \frac{\pi}{4}$, $y_{min} = 1$ при $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$; 2) $y_{max} = 2$ при $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $y_{min} = 0$ при $x = n\pi - \frac{\pi}{4}$; 3) $y_{max} = 1$ при $x = \frac{n\pi}{2}$, $y_{min} = \frac{1}{2}$ при $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; 4) $y_{max} = 1$ при $x = \frac{n\pi}{2}$, $y_{min} = \frac{1}{4}$ при $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$. Решение. $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^4 x) = (\sin^2 x + \cos^2 x) -$

$-3\sin^2 x\cos^2 x = !-\frac{3}{4}\sin^2 2x$; $y_{max}=1$ при $\sin^2 2x=0$. $x=\frac{n\pi}{2}$; $y_{min}=\frac{1}{4}$ при $\sin^2 2x=1$, $\sin 2x=\pm 1$. $x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

350. $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. **351.** $c=2\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}$; $a=\sqrt{2S\operatorname{tg}\alpha}$; $b=\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$.

352. $-\frac{h\cos 2\alpha}{\sin\alpha}\left(45°<\alpha<90°\text{, доказать, } \cos 2\alpha<0, -\frac{h\cos 2\alpha}{\sin\alpha}>0\right)$.

355. $\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}$; $\alpha=45°$; $\approx 24\frac{м}{сек}$. *Указание.* Для определения времени полета следует использовать равенство (см. черт. 29) $v_2 t=\frac{gt^2}{2}$, откуда $t=\frac{2v_2}{g}$; дальность полета равна $v_1 t$. **356.** 1) $x^2=1+y$; 2) $y=1-2x^2$. **357.** 1) $n\pi+\frac{\pi}{4}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$; 3) $2n\pi$ и $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; 4) $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ **359.** 5,5. **360.** 1) $\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha=\ldots=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **361.** 1) $-1\frac{11}{15}$; 2) $4\frac{1}{3}$. **362.** 1) $2k\pi$ и $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; 2) $119°34'+360°n$ и $-13°18'+360°n$; 3) нет решений (см. № 313/5/). **363.** $y_{min}=\sqrt{3}$ при $x=\frac{\pi}{3}$. **364.** 60°. *Указание.* $P=\frac{S}{n}+\frac{h(2-\cos x)}{\sin x}$, где P — смоченный периметр и x — угол откоса (получить выражение для P самостоятельно); далее смотри указание к № 320. **365.** Решение. 2) $1-\cos\alpha=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 3) $1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **366.** 1) $2\sin^2 20°$; 2) $2\sin^2 8°$: 3) $2\cos^2 0{,}11$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; 5) $\operatorname{ctg}\alpha$; 6) $\sin 2\alpha$; 7) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; 8) 1; 9) 1; 10) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

11) 1. **367.** Решение. 2) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$

$=\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **369.** $\dfrac{2R}{\sin\alpha}$;

$2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **370.** 1) $2k\pi$, $2\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{2}=2\left(\frac{\pi}{6}(-1)^n+\right.$

$\left.+n\pi\right)=\frac{\pi}{3}(-1)^n+2n\pi$; 2) $2n\pi$, $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; 3) x — произвольное число при $a=b=0$; $\pi(2k+1)$ и $\pm 2\arccos\frac{b}{2a}+4k\pi$ при $|b|<2|a|$ и $a\neq 0$; $\pi(2k+1)$ при $a=0$, $b\neq 0$. Решение. Если $a=b=0$, то $0\cdot(1+\cos x)=0\cdot\cos\frac{x}{2}$, откуда x—произвольное число. $2a\cos^2\frac{x}{2}-b\cos\frac{x}{2}=0$, $\cos\frac{x}{2}\left(2a\cos\frac{x}{2}-b\right)=0$, отсюда или $\cos\frac{x}{2}=0$ и $x=\pi(2k+1)$ или $2a\cos\frac{x}{2}-b=0$, $\cos\frac{x}{2}=$ $=\frac{b}{2a}$, причем $\left|\frac{b}{2a}\right|<1$ и $a\neq 0$, тогда $x=\pm 2\arccos\frac{b}{2a}+4k\pi$; $a=0\,(b\neq 0)$, данное (исходное) уравнение принимает вид $0\,(1+\cos x)=$ $=b\cos\frac{x}{2}$, откуда $\cos\frac{x}{2}=0$ и $x=\pi(2k+1)$. 4) x—произвольное число при $a=b=0$; $\pi(2k+1)$ и $2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{a}{b}+2k\pi$ при $b\neq 0$; $\pi(2k+1)$ при $b=0\,(a\neq 0)$. **371.** 1) I или III; 2), 3), 4) любой четверти. **372.** Если задано значение $\cos\alpha$, то $\frac{\alpha}{2}$ может быть углом любой из четырех четвертей, поэтому любая из функций угла $\frac{\alpha}{2}$ имеет как положительное, так и отрицательное значение. **373.** 1) $\pm\sqrt{0{,}8}$, $\pm\sqrt{0{,}2}$, ± 2; 2) $\pm\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{26}}$, 5; 3) $-0{,}5$; 4) $\frac{3}{\sqrt{13}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{7}}$;

6) $\sqrt{0,1}$; 7) $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **374.** Решение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$

$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$. **375.** 1) ± 5;

2) $-\frac{3}{5}, -\frac{5}{3}$; 3) $\pm\frac{1}{2}$. **377.** 1) $\sin 38° + \sin 18°$; 2) $\cos\frac{5\pi}{24} - \cos\frac{11\pi}{24}$;

3) $\frac{1}{2}(\cos 38° + \cos 66°)$; 4) $\frac{1}{2}(\sin 38° - \sin 14°)$; 5) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2x)$;

6) $\frac{1}{2}[1 + \cos 2(x-\alpha)]$; 7) $\frac{1}{2}(\sin 8 - \sin 2) = \frac{1}{2}(\cos 0,15 - \cos 0,43)$;

8) $\frac{1}{2}[\cos(2x+4) + \cos 4] = -\frac{1}{2}[\cos(2x+0,86) + \cos 0,86]$;

9) $\frac{1}{2}[\sin(x+2a+b) + \sin(x-b)]$. **378.** 1) $\sin 54° + \sin 14° - \sin 22° +$

$+ \sin 18°$; 2) $1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha$; 3) $\frac{1}{2}(1 - \sin 10° +$

$+ \cos 28° - \sin 38°)$; 4) $\frac{1}{4}(\sin 4\beta + \sin 8\beta - \sin 12\beta)$. **379.** 1) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$;

2) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$. **381.** 1) $y_{max} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}$, $y_{min} =$

$= \frac{\cos\frac{\pi}{12} - 1}{2}$; 2) $y_{max} = 0$, $y_{min} = -1$; 3) $y_{max} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$,

$y_{min} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$; 4) $y_{max} = \frac{\sqrt{10}-1}{2}$, $y_{min} = -\frac{1+\sqrt{10}}{2}$.

382. 1) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $\pm\frac{\pi}{6} + n\pi$; 3) $\pm\frac{\pi}{6} + n\pi$;

4) $\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$. **383.** *Указание.* Для построения треугольника определить один из его углов (например, угол при вершине равен $\operatorname{arctg} 2$ — доказать!), использовав задачу-теорему 332. **384.** 1) $\cos 10°$; 2) $\cos 15°$;

3) $\cos 14°$; 4) $-2\sin 0,1\cdot\cos 0,3$; 5) $\frac{2}{\sin 32°}$; 6) $\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{10}$;

7) $-\sqrt{3}\sin 26°$. *Указание.* Для перехода от косинуса угла к синусу

можно пользоваться двумя формулами приведения: $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ — рационально применить в данном (7) примере; $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ — применить в примере 16; 8) $\frac{1}{2\sin 18^\circ\cos 42^\circ}$; 9) $\frac{\sin\frac{\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{14}}$;

10) $\frac{\sqrt{2}\cos 32^\circ}{\cos 13^\circ}$ (решать можно так: $1+\operatorname{tg}13^\circ=\frac{\cos 13^\circ+\sin 13^\circ}{\cos 13^\circ}=$ $=\frac{\sqrt{2}\sin(13^\circ+45^\circ)}{\sin 13^\circ}=\frac{\sqrt{2}\cos 32^\circ}{\cos 13^\circ}$, см. задачу 311);

11) $\frac{\sqrt{2}\sin(\beta-45^\circ)}{\sin\beta}$; 12) $-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18}$; 13) $-\frac{\operatorname{ctg}0{,}57}{\sin 0{,}43}$;

14) $\sqrt{3}\cos\alpha$; 15) $\sin\alpha$; 16) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

385. 1) $\sin 24^\circ\cos 38^\circ$ [при решении примера рационально использовать такой прием: $\sin^2 38^\circ-\sin^2 14^\circ=\frac{1}{2}(1-\cos 76^\circ-1+\cos 28^\circ)=$ $=\sin 52^\circ\sin 24^\circ=\sin 24^\circ\cos 38^\circ$; так же выполняется решение примеров 2—5 и сходных с ними в дальнейшем]; 2) $\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{5}\right)$;

3) $-\cos(0{,}6+\beta)\cos(0{,}6-\beta)$; 4) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; 5) $-\cos\frac{\pi}{4}\cos 2\alpha$;

6) $\approx\cos 0{,}77\cdot\cos 0{,}2$. [$\sin 0{,}3\cdot\cos 0{,}3+\sin 0{,}5\cdot\cos 0{,}5=\frac{1}{2}(\sin 0{,}6+$ $+\sin 1)=\sin 0{,}8\cos 0{,}2\approx\cos 0{,}77\cos 0{,}2$]; 7) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}$;

8) $\operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}$; 9) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}$; 10) $\sqrt{8}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$;

11) $\sqrt{8}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 12) $\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$;

13) $\frac{\sqrt{8}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}$; 14) $\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$;

15) $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$; 16) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$; 17) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\right.$ $\left.+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$; 18) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$;

19) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$; 20) $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

21) $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\alpha}$; 22) $\frac{4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\alpha}$;

23) $4\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; 24) $4\sin 2\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\right.$ $\left.+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$; 25) $4\cos\frac{\alpha+\varphi}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$. **386.** 1) $y_{\max}=1$, $y_{\min}=-1$; 2) $y_{\max}=\sqrt{3}$, $y_{\min}=-\sqrt{3}$. **387.** *Указание.* Для доказательства использовать задачу-теорему 332. **388.** $\frac{p}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{6}\right)}$,

$\frac{\sqrt{2}\,p\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$, $\frac{\sqrt{2}\,p\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **389.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$;

2) $-\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi$, $\frac{\pi}{4}+2k\pi$; 3) $-\frac{5\pi}{24}+\frac{n\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{12}+n\pi$; 4) $\frac{n\pi}{2}$,

$-\frac{\pi}{6}(-1)^n+n\pi$; 5) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$, если $\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$;

x — произвольное число при $\alpha=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **390.** Доказательства в данном случае не требуется в силу обратимости преобразований; в самом деле: если числа равны (первое равенство), то их разность равна нулю (второе равенство — следствие первого) и обратно — если разность между двумя числами равна нулю, то эти числа равны (первое равенство — следствие второго); то же и при последующих преобразованиях. **391.** 1) $\alpha\pm\beta=\pi(2n+1)$. **392.** *Указание.* $\cos\alpha=-\cos\beta$; $\cos\alpha=\cos(\pi-\beta)$; $\alpha\pm(\pi-\beta)=2k\pi$; $\alpha\pm\beta=\pm\pi+2k\pi=\pi(2k+1)$.

$$\left.\begin{array}{l}2)\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{array}\right\}\left(\cos\alpha=\sin\beta;\ \cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\text{ и т. д.}\right);$$

3) $\alpha+\beta=\pi(2k+1)$ или $\alpha-\beta=2k\pi$; $\alpha-\beta=\pi(2k+1)$ или $\alpha+\beta=2k\pi$; 5) $\alpha\pm\beta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **393.** 1) $\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $k\pi$; 2) $\frac{k\pi}{2}$. *Указание.* Из двух формул корней $\frac{k\pi}{2}$ и $n\pi$ первая из них при четных значениях k содержит все корни второй формулы, поэтому для ответа можно ограничиться одной первой формулой. 3) $-\frac{\pi}{4}+k\pi$. *Указание.* Решая пример через равенство косинусов дуг и беря разность дуг, получаем: $\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x=2k\pi$, $0\cdot x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$; при любом целом k правая часть последнего равенства не равна нулю и потому уравнение не имеет решения; из уравнения $\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x=2kn$ не следует, что $\frac{\pi}{2}=2k\pi$ (как иногда пишут). 4) $\frac{3\pi}{4}+n\pi$; 5) x — произвольное число при $\alpha=k\pi$; $n\pi$ при $\alpha\neq k\pi$; 6) $\frac{\pi}{8}(2k+1)$ и $n\pi$; 7) $\frac{n\pi}{5}$; 8) $-\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{6}+k\pi$; 9) $\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}n\pi$ и $-\frac{\pi}{4}+\pi(2k+1)$; 10) $\alpha+2k\pi$ и $-\frac{\alpha}{3}+\frac{2}{3}n\pi$; 11) $\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24}$; $k\pi-\frac{\pi}{12}$; 12) $-\frac{\pi}{24}+n\pi$. **394.** 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$; 3) $-\sin(\alpha+\beta)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; 5) $\sin\alpha-\sin\beta$; 6) 0; 7) 0; 8) 0.

397. Примеры 1—10 данной задачи, как и многие другие этого и других параграфов, решаются различными способами. Здесь приведены по одному из возможных вариантов решения примеров 4 и 6. 4) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos(\alpha+\beta)=$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=-1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-1+4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

6) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma=$

$$=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta+\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}=$$

$$=\frac{\cos\alpha(\cos\beta\sin\gamma+\cos\gamma\sin\beta)+\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}=$$

$$= \frac{\cos\alpha \cdot \sin(\beta+\gamma) + \cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} = \frac{\sin\alpha[\cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos(\beta+\gamma)]}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} = \ldots = 1.$$

398. 1) $\sin^2(\alpha+\beta)$; 2) 1. 399. 1) $4\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha-\gamma}{2}$.

Решение (один из вариантов). $\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha - 2\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\alpha = \frac{1-\cos 2\beta + 1 - \cos 2\gamma}{2} - \sin^2\alpha - [\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)]\cos\alpha = \cos^2\alpha - \cos(\beta+\gamma)\cdot\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta-\gamma)\cos\alpha + \cos(\beta+\gamma)\cos\alpha = \ldots$

2) $4\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}\cos\frac{a+c-b}{2}\cos\frac{b+c-a}{2}$.

400. 1) $n\pi$ и $n\pi + \frac{\pi}{4}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi + \beta + \gamma$, если $\beta - \gamma \neq k\pi$; x — произвольное число, если $\beta - \gamma = k\pi$. 401. $\frac{a+b^2}{b}$ при $x = \frac{3\pi}{4}$. 403. Или $\alpha + \beta = 2k\pi$, или $\alpha = 2k\pi$, или $\beta = 2k\pi$. 404. а) Доказательство. $\sin\alpha = 2\sin\beta\cos\gamma \to \sin(\beta+\gamma) - 2\sin\beta\cos\gamma = 0 \to \sin(\gamma-\beta) = 0 \to \gamma-\beta = n\pi$; абсолютная величина разности двух углов треугольника меньше π, поэтому $\gamma-\beta=0$ или $\gamma=\beta$, что и требовалось доказать. Доказано необходимое условие выполнения данного равенства (следствие его выполнения). б) Достаточное условие. 405. *Указание.* Здесь опять требуется доказать необходимое (только тогда!) условие выполнения данного равенства. Задачу следует понимать так.

Дано: α, β и γ — острые углы, равенство $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$ выполняется. Требуется доказать: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Доказательство (один из вариантов). Перенеся все члены равенства в левую часть и разложив эту часть равенства на множители, получим: $\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right) = 0$; $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} > 0$, так как по условию задачи α, β и γ — острые углы, их половины также острые углы, а полуразность любых двух из этих углов будет углом I и IV четверти, вследствие чего $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ и $\sin\frac{\gamma}{2} > 0$; из двух сомножителей полученного произведения только

второй может быть равен нулю: $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}=0$, откуда $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}$, острые углы $\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$ являются дополнительными и, следовательно, $\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ или $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, что и требовалось доказать. **406.** Решение (один из вариантов доказательства достаточности условия). Дано: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Доказать: $\cos\alpha+\cos\beta=\sin\gamma$. Если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то $\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, т. е β и γ — дополнительные углы; $\cos\alpha+\cos\beta=\sin\gamma\rightleftarrows\cos\beta=\sin\gamma$, равенство справедливо, так как β и γ — дополнительные углы.

Глава V. Основные свойства тригонометрических функций

412. а) интервал, (—2, 3); б) полусегмент, [—3, 1); в) сегмент [—1, 4]; г) полуинтервал, (—2, 2]. **414.** По соглашению считается бесконечным интервалом (— ∞, ∞) 5.1) сегментом, [—1, 1] или $|\sin x|<1$; 2) бесконечным интервалом (— ∞, ∞) или $|\operatorname{tg} x|\geqslant 0$; 3) бесконечным интервалом, (— ∞, ∞) или $|\operatorname{ctg} x|\geqslant 0$; 4) сегментом, [— 1, 1] или $|\cos x|<1$; 5) двумя числовыми промежутками: полусегментом, [1, ∞) и полуинтервалом (— ∞, —1], совместно оба промежутка записываются неравенством $|\sec x|\geqslant 1$; 6) то же, что для $\sec x$. **417.** Косинусом данного действительного числа называется абсцисса точки единичной (числовой) окружности, изображающей данное действительное число; аналогично определяются и остальные тригонометрические функции. **418.** По определению тригонометрических функций действительного числа: тригонометрические функции действительного числа равны одноименным функциям угла (дуги), радианная мера которого (которой) равна данному действительному числу; все свойства и правила преобразований тригонометрических функций угла (дуги) распространяются и на тригонометрические функции действительных чисел, и наоборот— все свойства тригонометрических функций действительных чисел распространяются и на функции углов (дуг). **419.** 1) —1,5; —0,5; 1,5; 2,5; 2) $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$; 3) 0; ±1; $\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3};\pm 2;\sqrt{5};\sqrt{6}$; 4) $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}$; 5) $-1;\frac{1}{3};\frac{5}{3}$; 6) $-1\frac{11}{12};-1\frac{5}{12};-\frac{11}{12};-\frac{5}{12};\frac{1}{12};\frac{7}{12};\frac{13}{12};\frac{19}{12};\frac{25}{12}$. Решение примера 2. $\sin(\cos x)=0$; $\cos x=n\pi$,

где $n = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots$; $|\cos x| < 1$ только при $n = 0$ откуда $\cos x = 0$, $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; только при $k = 0$ будет выполняться неравенство $-2 < x < 2{,}5$, следовательно, $x = -\frac{\pi}{2}$ или $x = \frac{\pi}{2}$. Решение примера 3. $\sin \pi x^2 = 0$, $\pi x^2 = n\pi$, $x^2 = n$, где $n = 0; 1; 2; \ldots$ (отрицательные значения n здесь отпадают, так как x^2 — положительное число). Далее извлечением квадратного корня из указанных значений n находятся соответствующие значения x на заданном сегменте

421. $|x| \geqslant 0$ (для $\sin x$ и $\cos x$). 422. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (для $\operatorname{tg} x$); $x \neq n\pi$ (для $\operatorname{ctg} x$). (Здесь запись $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ понимается в том смысле, что аргумент может принимать значение любого действительного числа за исключением чисел вида $\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

423. 1) $|x| \geqslant 0$; 2) $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ (при $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ знаменатель дроби равен нулю); 3) $x \neq n\pi$; 4) $x \neq \frac{n\pi}{2}$; 5) $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 6) $x \neq \frac{n\pi}{2}$ (при $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ не существует $\operatorname{tg} x$, при $x = n\pi$ знаменатель дроби равен нулю); 7) $x \neq n\pi$; 8) $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 9) $x \neq n\pi$; 10) $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$; 11) $x \neq \pi(2k+1)$; 12) $x \neq \frac{n\pi}{2}$; 13) $x \neq n\pi$; 14) $x \neq n\pi - \frac{\pi}{4}$. *Указание.* В тех случаях, когда встречается затруднение в определении значений аргумента x, при которых знаменатель дроби обращается в нуль, можно приравнять этот знаменатель нулю и решить полученное уравнение; корни последнего и будут теми значениями аргумента x, которые подлежат исключению. В данном примере: $\sin x + \cos x = 0$; $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $x + \frac{\pi}{4} = n\pi$, $x = n\pi - \frac{\pi}{4}$. 15) $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $x \neq n\pi + \frac{\pi}{4}$; 16) $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 17) $x \neq \pi(2k+1)$; 18) $x \neq \frac{n\pi}{3}$; 19) $x \neq \frac{\pi}{4}(2n+1)$ и

$x \neq \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}(4n - 1)$; 20) $|x| \geqslant 0$. 424. 1) Расширяется на множество чисел (м. ч.) вида $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$; 2) расширяется на м. ч. вида $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$; 3) сужается на м. ч. вида $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$; 4) сужается на м. ч. вида $n\pi$; 5) расширяется на м. ч. вида $n\pi + \frac{\pi}{4}$; 6) сужается на м. ч. вида $\pi(2k + 1)$; 7) сужается на м. ч. вида $\pi(2k + 1)$; 8) сужается на м. ч. вида $\frac{\pi}{2}(2k+1)$. *Указание.* $\operatorname{tg} 2x$ не существует при $x = \frac{\pi}{4}(2n + 1)$, $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ не существует при $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ и $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ — знаменатель дроби иначе будет равен нулю; но $n\pi \pm \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(4n \pm 1) = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$; 9) расширяется на м. ч. вида $\frac{\pi}{2}(4k+3)$; 10) не изменяется. 425. 1) $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $x \neq \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ и $x \neq n\pi - \frac{\pi}{4}$; 3) $x \neq \frac{\pi}{2}(2k + 1)$; 4) $x \neq \pi(2k + 1)$; 5) $x \neq m\pi$; 6) $x \neq n\pi - \frac{\pi}{4}$; 7) $|x| > 0$; 8) $x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1)$ и $x \neq \frac{n\pi}{2}$; 9) $x \neq \frac{\pi}{6}(2m + 1)$; 10) $x \neq \frac{n\pi}{2}$; 11) $x \neq n\pi + \operatorname{arc\,tg} 2$; 12) $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$; 13) $x \neq \frac{n\pi}{2}$. 426. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $n\pi - \frac{\pi}{4}$. *Указание.* При переходе от исходного уравнения $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0$ к выводному $\cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x) = 0$ область определения исходного уравнения ($|x| \geqslant 0$) сузилась на множество чисел вида $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$; эти последние не удовлетворяют выводному уравнению, но удовлетворяют исходному, в чем убеждаемся непосредственной подстановкой:

$$\cos^2 \frac{\pi}{2}(2k + 1) + \sin \frac{\pi}{2}(2k + 1) \cdot \cos \frac{\pi}{2}(2k + 1) = 0 \pm 1 \cdot 0 = 0.$$

Во всех случаях, когда при переходе к выводному уравнению область определения исходного уравнения сужается, обязательно следует проверять (хотя бы устно) пригодность выпавших допустимых для исходного уравнения значений неизвестного подстановкой этих значений в исходное уравнение (во избежание потери корней) или избрать дру-

гой вариант решения — без сужения области определения исходного уравнения (см. 431, пример 2). Таким образом, все однородные уравнения можно решать одним рассмотренным сейчас приемом, причем однородные уравнения первой степени предпочтительно (часто устно!) решать введением вспомогательного угла (см. № 313, примеры 3 и 4) — без изменения области определения исходного уравнения. 427. 1) $n\pi - \frac{\pi}{4}$, $n\pi - \operatorname{arc\,tg}\,0{,}5$; 2) $n\pi - \frac{\pi}{4}$, $n\pi + \operatorname{arc\,tg}\,3$; 3) $n\pi$, $n\pi + \frac{\pi}{4}$; 4) x — произвольное число, если $a = b = 0$; $n\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$, если $a \neq 0$; $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ при $a=0$ и $b \neq 0$. 428. 1) $\pi(2k+1)$, $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; 2) нет корней (см. № 313, пример 5); 3) $2n\pi - \frac{\pi}{12}$, $\pi(2k+1) + \frac{5\pi}{12}$; 4) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$. 429. 1) $\pi(2k+1)$. *Указание.* Область определения исходного уравнения: $x \neq 2k\pi$; умножив обе части уравнения на знаменатель дроби, приводим полученное выводное уравнение после сокращения дроби к целому виду: $\sin x = 0$. Область определения выводного уравнения: $|x| \geqslant 0$, она шире области определения исходного на множество чисел вида $2n\pi$. Корни выводного уравнения $x = k\pi$; при четном $k\,(k = 2n)$ получаем числа вида $2n\pi$, удовлетворяющие выводному, но не удовлетворяющие исходному уравнению и подлежащие исключению (посторонние корни); при нечетном $k\,(k = 2n \pm 1)$ получаем числа вида $\pi(2n \pm 1)$, удовлетворяющие решению как выводного, так и исходного уравнения. Другой вариант решения. Сократив дробь в левой части исходного уравнения, получим выводное $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$ с той же областью определения ($x \neq 2n\pi$), как исходное; теперь решение выводного уравнения — $x = \pi(2k \pm 1)$ — будет непосредственно и решением исходного. Таким образом, если область определения данного уравнения при переходе к выводному расширяется, то из корней выводного уравнения следует отобрать и оставить лишь принадлежащие области определения исходного уравнения, отбросив остальные как посторонние для исходного уравнения корни; выбор приема решения данного уравнения при таком подходе совершенно свободен. (См. также статью «О решении и исследовании уравнений в курсе школы», «Математика в школе», 1951, № 1). 2) Нет корней; 3) $n\pi$; 4) нет корней; 5) $n\pi$; 6) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; 7) $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{3}$. *Указание.* Использовать формулы задачи 374.

431. 1) $30° + 90° n$. *Указание.* В этом примере в силу расширения области определения исходного уравнения ($x \neq 110° + 180° n$ и $x \neq 130° + 180° n$) при переходе к выводному ($|x| \geqslant 0$) следует проверить нет ли среди корней выводного уравнения ($x = 30° + 90° n$), подлежащих исключению. В данном случае это можно сделать устно: числа вида $110° + 180° n$ и $130° + 180° n$ не делятся на 3 (на три делится только одно из двух слагаемых), числа вида $30° + 90° n$ кратны числу 3 и потому среди них нет подлежащих исключению. 2) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$. *Примечание.* Полезно сделать попытку решить это уравнение, выразив $\operatorname{tg} 2x$ и $\operatorname{ctg} x$ через $\operatorname{tg} x$, и объяснить полученный результат. 3) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$. **436.** *Указание.* $\sin(ax \pm b) = \sin(ax \pm b \pm 2\pi) = \sin[(ax + 2\pi) + b] = \sin\left[a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) + b\right]$. **438.** *Указание.* $y = a = 0x + a = 0(x + h) + a$, где h — произвольное число. **439.** 1) π; 2) 6π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 2π; 5) π. *Указание.* $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$; 6) π; 7) 4π; 8) 2π; 9) 2π; 10) π. *Указание.* $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. 11) 2π; 12) π; 13) 1; 14) 2π. *Указание.* $\cos x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{2}\sin x \cdot \sin 2x = \frac{1}{4}(\cos x - \cos 3x)$; 15) 2π; 16) 2π; 17) π; 18) π; 19) 6π; 20) $\frac{\pi}{4}$; 21) $\frac{\pi}{2}$; 22) π; 23) нет периода. **440.** 1), 2), 3), 5), 6) — можно; 4) — нельзя. **441.** Добавить «или отличается от него на целое число периодов данной функции». **442.** Равном периоду данной функции. **443.** В силу периодичности функции $\cos x$ с периодом 2π. **446.** Можно. **451.** 1) $\left(\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$. *Указание.* Установить на числовой окружности в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, равном периоду функции $\operatorname{tg} x$, промежуток, в котором $\operatorname{tg} x > 1$, и записать общее решение, имея в виду, что период $\operatorname{tg} x$ равен π. Такой прием можно использовать и при решении других примеров данного номера задачи, а также примеров задачи 452. 2) $\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi\right)$; 3) $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$; 4) $\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi\right)$. **452.** 1) $[2k\pi, \pi(2k+1)]$; 2) $\left(2k\pi, \pi(2k+1)\right)$;

3) $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; 4) $\left(2k\pi,\ \pi(2k+1)\right)$; 5) $x \neq \pi(2k+1)$; 6) $|x| > 0$; 7) $\left[n\pi,\ \frac{\pi}{2}(2k+1)\right)$; 8) $\left(k\pi,\ \frac{\pi}{2}(2k+1)\right)$; 9) $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ 2k\pi\right)$ и $\left(2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$; 10) $\left[-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ \frac{\pi}{2}(2n+1)\right)$; 11) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$. **453.** 1) $1+\operatorname{tg}\alpha$ при $-\frac{\pi}{4}+n\pi < \alpha < \frac{\pi}{2}+n\pi$, $-(1+\operatorname{tg}\alpha)$ при $-\frac{\pi}{2}+n\pi < \alpha \leqslant -\frac{\pi}{4}+n\pi$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha$ в интервалах $\left(2k\pi,\ \pi(2k+1)\right)$ значений α, $-\operatorname{ctg}\alpha$ в интервалах $\left(\pi(2k+1),\ 2k\pi\right)$. **456.** 1) Например, преобразовать совмещением нулевой точки числовой окружности с началом координат на прямой и далее бесконечным развертыванием окружности на прямой как в положительном, так и в отрицательном направлениях. 2) *Указание.* Взять на оси OX две произвольные точки: $\frac{\pi}{2}+x$ и $\frac{\pi}{2}-x$, симметричное относительно точки $\frac{\pi}{2}$; доказать, основываясь на формулах приведения, что ординаты точек синусоиды, соответствующих взятым на оси OX, равны; далее опереться на понятие о симметричных относительно прямой точках. 3) *Указание.* Взять на оси абсцисс две точки x и $-x$, симметричные относительно начала координат, соединить отрезком прямой соответствующие взятым точки синусоиды; из сопоставления полученных прямоугольных треугольников доказать, что отрезок прямой проходит через начало координат и делится в этой точке пополам. **458.** 2) I при четном k и III при нечетном k. **459.** Синусоида смещается по направлению оси OY на $|c|$ единиц: поднимается при $c>0$, опускается при $c<0$. **460.** Синусоида претерпевает растяжение по направлению оси OY в $|A|$ раз при $|A|>1$ или сжатие в $1:|A|$ раз при $0<A<1$; при $|A|<0$ синусоида еще и симметрично отражается относительно оси OX. **461.** При $b>0$ синусоида смещается влево по направлению оси OX на b единиц при $b<0$ смещается вправо на $|b|$ единиц. **462.** При $|a|>1$ синусоида претерпевает сжатие по направлению оси OX в $|a|$ раз; при $|a|<1$ — растяжение в $1:|a|$ раз. **463.** В зависимости от параметра a синусоида претерпевает сжатие или растяжение по направлению оси OX задача 462), в зависимости от параметров a и b (совместно) смещается влево на $\frac{b}{a}$ единиц при $\frac{b}{a}>0$ или вправо на $\left|\frac{b}{a}\right|$ единиц при $\frac{b}{a}<0$. **465.** 1) $|x|>0$; 2) π; 3) положительна в интервалах $\left(1+n\pi,\ 1+\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)$ и отрицательна в интервалах $\left(1+\frac{\pi}{2}(2k-1),\right.$

$1 + n\pi\Big)$; 4) возрастает на сегментах $\left[1 + \frac{\pi}{4}(4k - 1),\ 1 + \frac{\pi}{4}(4k + 1)\right]$, убывает на сегментах $\left[1 + \frac{\pi}{4}(4n + 1),\ 1 + \frac{\pi}{4}(4n + 3)\right]$; 5) $y_{\max} = 3$; $y_{\min} = -3$. **469.** 4) $\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ \frac{5\pi}{3} + 2n\pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{3} + n\pi,\ \frac{\pi}{3} + n\pi\right)$. **472.** 3) $\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi,\ \frac{\pi}{2}(2n + 1)\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi,\ \frac{\pi}{4} + n\pi\right)$. **473.** 3) $\left(\frac{5\pi}{6} + n\pi,\ \pi(n + 1)\right)$; $\left(\frac{\pi}{6} + n\pi, \frac{5\pi}{6} + n\pi\right)$. **475.** 1), 2), 3), 5), 6) — периодические. 2), 6) — четные; 1), 4) — нечетные. **476.** 1) $2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ при четном k и $-2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ при нечетном k; 2) $2\operatorname{ctg}\alpha$. **477.** 0,34. *Указание.* Решить графически и уточнить. **478.** 1) 1, 6, $\frac{1}{6}$, $\frac{\pi}{5}$; 2) 2, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3}{2\pi}$, 0; 3) 3, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{5}{2\pi}$, $\frac{\pi}{6}$; 4) 1, $\frac{1}{50}$, 50, -3; 5) 10, π, $\frac{1}{\pi}$, 10. **479.** $y = \sin\frac{\pi}{6}t$; 1) в 5 *см* по направлению к концу B_1 отрезка; 2) в точке B_1 на расстоянии 10 *см* от середины отрезка; 3) на расстоянии $5\sqrt{3} \approx 8{,}6$ *см* в сторону конца B отрезка; 4) в середине отрезка.

Глава VI. Вычисление тригонометрических выражений

480. 1) 7,546; 2) 3,629; 3) 0,9258; 4) 0,8686; 5) 0,3670; 6) 337,5; 7) 0,2108; 8) 0,7719; 9) 0,0007388; 10) 0,8958; 11) 8704; 12) 11,15; 13) 0,003030; 14) 58,23; 15) 0,009394. **481.** 1) 23°45′; 2) 2°38′; 3) 23°12′; 4) 40°24′; 5) 86°03′; 6) 86°32′; 7) 16°34′; 8) 67°20′; 9) 70°15′; 10) 38°34′; 11) 34°01′; 12) 19°58′. **482.** 0,00325; 2) 0,000285; 3) 0,0572; 4) 0,371; 5) 0,790; 6) 0,822; 7) 0,00436; 8) 11,4; 9) 960; 10) 46,4; 11) 0,390; 12) 0,000285; 13) 2000; 14) 0,455; 15) 1,55; 16) 0,0615. **483.** 1) 52°45′; 2) 30°56′; 3) 25°40′; 4) 55°56′; 5) 67°40′; 6) 79°36′; 7) 14°34′; 8) 8°34′; 9) 8°36′; 10) 87°04′; 11) 1°15′; 12) 24°21′; 13) 36°02′; 14) 63°20′; 15) 81°36′; 16) 11°49′. **486.** а) 1) $\bar{1}$,3703; 2) $\bar{1}$,0033; 3) $\bar{1}$,9548; 4) $\bar{1}$,8241; 5) $\bar{3}$,9952; 6) $\bar{1}$,9911; 7) $\bar{1}$,6685; 8) $\bar{2}$,7212; 9) $\bar{1}$,9080; 10) нет; 11) $\bar{1}$,9465; 12) $\bar{1}$,8406. б) 1) $\bar{1}$,8204; 2) $\bar{2}$,6889; 3) $\bar{2}$,9983; 4) $\bar{1}$,8365; 5) $\bar{1}$,9931; 6) $\bar{1}$,7191; 7) $\bar{1}$,5540; 8) нет; 9) $\bar{1}$,4130; 10) $\bar{1}$,9300; 11) $\bar{1}$,6130; 12) нет. в) 1) $\bar{2}$,7802; 2) $\bar{1}$,9833; 3) $\bar{2}$,9992; 4) 0,5522; 5) 1,7217;

6) $\overline{2},0548$; 7) нет; 8) $\overline{1}.7232$; 9) 0,1387; 10) 0,1150; 11) 0,5366; 12) $\overline{1},5173$.
г) 1) 0,4091; 2) $\overline{1},6716$; 3) $\overline{1},0017$; 4) $\overline{3},9551$; 5) 0,0413; 6) 0,4697; 7) 0,2907; 8) нет; 9) 0,7358; 10) $\overline{2},6773$. **488.** а) 1) 42°30′; 2) 5°46′; 3) 26°41′; 4) нет угла; 5) 31′; 6) 71°50′. б) 1) 17°54′; 2) 45°47′; 3) 89°23′; 4) 25°21′; 5) нет угла; 6) 78°32′. в) 1) 78°36′; 2) 29°27′; 3) 5°04′; 4) 39°59′; 5) 86°24′; 6) 55°30′. г) 1) 76°53′; 2) 16°35′; 3) 74°46′; 4) 89°25′; 5) 26′; 6) 69°17′. **489.** 1) 21°18′; 2) 38°54′; 3) —35°38′; 4) 97°59′; 5) —0,6372; 6) 104°29′. **490.** 1) 800 $дм^2$; 2) 43,6; 3) 0,218; 4) 3225; 5) 1160; 6) 46,05. **491.** 1) 194,0; 2) 41,1; 3) 11,82; 4) 234500.

Глава VII. Решение косоугольных треугольников

493. 1) $a = 10{,}69$; $c = 11{,}66$; $B = 71°$; $S = 58{,}88$. 2) $b = 62{,}46$. $c = 27{,}81$; $A = 48°40'$; $S = 652{,}1$. 3) $a = 13{,}30$; $b = 5{,}332$; $C = 110°03'$; $S = 33{,}33$. 4) $a = 103$; $c = 113$; $A = 61°13'$; $S = 4020$. **494.** 1) $c = 13{,}40$; $B = 36°29'$; $C = 95°31'$; $S = 39{,}82$. 2) $B_1 = 140°05'$, $B_2 = 10°43'$; $A_1 = 25°19'$; $A_2 = 154°41'$; $b_1 = 20{,}72$, $b_2 = 6{,}005$; $S_1 = 36{,}08$, $S_2 = 10{,}45$. 3) Треугольник не существует. 4) $B_1 = 52°27'$, $B_2 = 127°33'$; $C_1 = 95°15'$, $C_2 = 20°09'$; $c_1 = 35{,}4$, $c_2 = 12{,}3$; $S_1 = 267$, $S_2 = 92{,}3$. **497.** *Указание.* Предварительно умножить обе части первого равенства на a, второго — на b, третьего — на c. **499.** 1) $A = 21°56'$; $C = 34°04'$; $b = 62{,}17$; $S = 487{,}5$. 2) $B = 104°33'$; $C = 45°35'$; $a = 1{,}179$; $S = 0{,}9638$. 3) $A = 61°29'$; $B = 44°51'$; $c = 43{,}7$; $S = 616$. 4) $A = 92°49'$; $C = 47°51'$; $b = 1{,}45$, $S = 1{,}23$. **500.** 1) $A = 5°12'$; $B = 83°30'$; $C = 91°18'$; $S = 1063$. 2) $A = 37°22'$; $B = 38°16'$; $C = 104°22'$; $S = 48{,}44$. 3) $A = 71°12'$; $B = 49°42'$; $C = 59°01'$; $S = 112$. 4) $A = 39°15'$; $B = 41°05'$; $C = 99°40'$; $S = 0{,}30$.

501. $a = \dfrac{k \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}$; $b = \dfrac{k}{\sin(\alpha + \beta)}$; $c = \dfrac{k}{\sin\beta}$;

$S = \dfrac{k^2 \sin\alpha}{2 \sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}$. **504.** $c \sin\alpha$. **505.** $\dfrac{h}{2} \dfrac{\sin\alpha \cdot \sin 2\beta}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}$.

507. $\arccos(\sin\alpha \cdot \sin\beta)$. **509.** $\dfrac{l \cos(\alpha + \varphi)}{\sin\varphi}$.

Глава VIII. Задачи на повторение

513. $4 \sin\alpha$. **515.** $-\cos 2k$ (I ч.), $\cos 2k$ (IV ч.).

525. а) $\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; б) $\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2} \cdot \cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Указание.* На-

читать с умножения и деления данной суммы на $2\sin\frac{\alpha}{2}$. 526. а) 0.

527. Обе положительны в интервалах $\left(2k\pi,\ \pi(2k+1)\right)$ значений α, обе отрицательны в интервалах $\left(\pi(2k-1),\ 2k\pi\right)$. 528. $-\cos 3\alpha$, если x — угол I ч.; $\cos\alpha$, если x — угол IV ч.

531. $\dfrac{4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right]$.

533. $\frac{a+c}{2}\pm\frac{\sqrt{b^2+(a-c)^2}}{2}$. 539. $\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $\pi(2k+1)$. 540. $\frac{\pi}{9}\left(n-\frac{1}{12}\right)$; $\frac{\pi}{24}(12k+7)$. 541. $90°k+42°,5$.

542. $\frac{\pi}{8}(2k+1)$; $\frac{k\pi}{2}$. 543. $\frac{\pi}{11}(2k+1)$; $\frac{\pi n}{3}$. 544. $\frac{n\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

545. $\frac{\pi}{4}(2k+3)$; $k\pi$. 546. а) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; б) $2n\pi$; $\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

547. $\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{3}$. 548. $\frac{\pi}{4}(4k+3)$; $\frac{\pi}{2}(4k+3)$; $2k\pi$. 549. $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

550. $n\pi+\frac{\pi}{4}$. 551. $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 552. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 553. Нет корней.

554. $\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 555. Нет корней. 556. $\frac{n\pi}{3}$. 557. Нет корней.

558. $\operatorname{arc}\cos\frac{4}{5}$. 559. $2\operatorname{arc}\sin\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$. 560. $n\pi$, $\pi n+\alpha$ — если $\alpha\neq\frac{n\pi}{2}$; x — произвольное число, исключая чисел вида $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, если $\alpha=n\pi$; нет решений при $\alpha=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 561. $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{b\pm a}{a+b}$ при $a\neq -b$; $\frac{\pi}{4}(4k+1)$ и $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ при $a=-b\neq 0$; x — произвольное число, если $a=b=0$. 562. $2k\pm\frac{1}{\pi}\arccos 0{,}1$; $2k\pm\frac{1}{3}$; $2k+1\pm\frac{1}{\pi}\arccos 0{,}7$. 563. $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\left(k+\frac{1}{4}\right)$, где $k=0;\ \pm 1;\ \pm 2$.

564. $0,\ \pm 0{,}88$. 565. $0;\ \pm 2{,}85;\ \pm 7{,}07;\ \pm 8{,}42$. 567. 1) $\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$;

2) $-\dfrac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}$; 3) $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 4) $\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}$; 5) $\dfrac{1}{2}\sin x$; 6) $-\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin^3\frac{x}{2}}$; 7) $-2\sin 4x$. 569. $\arccos\dfrac{1}{3}$. 570. $\arcsin\dfrac{1}{3}$. 571. $\arcsin\dfrac{R\sin z}{d}$; $\arcsin\dfrac{R}{d}$; горизонтальный параллакс. 573. $\operatorname{arc\,tg} k = \rho$. 574. а) 27°54′; б) 76°; в) 1,20. 575. 21°44′. 576. $x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, основание $a = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$, высота $h = \dfrac{d\sqrt{6}}{3}$. 577. $10a$; 111; $\approx 5{,}4a$; $\approx 2{,}6\ a$; $\approx 5{,}8\,a$. 578. а) В момент $t = 5{,}6$ груз находится на 3,09 *см* ниже положения равновесия, двигаясь вниз со скоростью 179 $\dfrac{см}{сек}$ и с замедлением 1 100 $\dfrac{см}{сек^2}$ под действием направленной к положению равновесия силы в $1100m$ *г*, и т. д. б) Наибольшую скорость 188,4 $\dfrac{см}{сек}$ груз будет иметь через $\dfrac{1}{12}$ *сек*. при прохождении через положение равновесия и т. д.

Глава IX. Задачи по стереометрии с применением тригонометрии

579. $\arccos\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$; $0 < \alpha < \dfrac{2\pi}{n}$; 2) 47°50′. 580. $\arccos\dfrac{\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \beta$; 2) 47°50′. 581. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\arccos\left(\cos\varphi\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$; $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ (т. е. любая пара значений α и φ в указанных для них границах будет допустимой системой значений этих параметров). 582. $\dfrac{b\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\frac{\beta}{2}}$; $0 < \beta < \pi$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; в центр описанной около треугольника ABC окружности. 583. $\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$,

$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha$; $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 584. $a\sin\alpha\sin\varphi$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 585. $\frac{2d^2\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin^2 2\varphi}$ $дм^2$; $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, $\alpha>0$, $\beta>0$ и $\alpha+\beta<\pi$. 586. $q\cos\alpha$; не изменится. 587. $\frac{q}{\cos\alpha}$. 588. $\approx 40°$. 590. $\frac{\sqrt{8d^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}}{\sin^2\beta}$. 591. $2a^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$; $0<\alpha<\pi$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. 592. $\frac{pq}{l}\sin\alpha$. 593. $\frac{1}{2}bc^2\sin^2\alpha$. 594. $\frac{1}{2}b^2l\sin\alpha\sin\varphi$; $2bl\sin\frac{\alpha}{2}$; $0<\alpha<\pi$ и $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. 595. $2ab\sin\frac{\alpha}{2}$; $2ab\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}$; 1) и 2)—имеет смысл, 3) и 4)—не имеет смысла. 596. $a^2\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. 597. $\frac{8r^3\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}$. 598. $bQ\sin^2\alpha$. 599. $\frac{4d^3\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{\sin^2 2\alpha\cos\beta}$. 600. $\frac{a^2\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cos^2\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}$; $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$. *Указания.* а) Исследование решения как в данной задаче, так и в последующих понимается так: *исследовать решение задачи—значит установить множество допустимых систем значений всех параметров задачи* (т. е. таких систем, при которых заданная условием задачи фигура существует, найденное значение искомого элемента принадлежит множеству допустимых значений этого элемента, *удовлетворяя* решению задачи).

б) Применительно к данной задаче подобное исследование может быть выполнено так.

1) Длина стороны треугольника — положительное число: $a>0$.

Углы α и β — острые углы прямоугольных треугольников ADB и A_1BD_1: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$; кроме того, $\operatorname{tg}\beta\left(=\frac{AD}{DB}\right)$ больше $\operatorname{tg}\alpha\left(=\frac{A_1D_1}{BD_1}\right)$, так как $AD=A_1D_1$ и $BD<BD_1$ — катет прямоугольного треугольника BD_1D меньше его гипотенузы; из сравнения

тангенсов углов следует, что $\beta > \alpha$, значит, допустимые системы значений α и β определяются неравенством $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, заданная условием задачи призма существует при $\alpha > 0$ и $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

2) Получив решение в общем виде: $\frac{a^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{\sin \alpha \cos^2 \beta}$. убеждаемся, что при установленных исследованием допустимых системах значений параметров искомая площадь выражается положительным числом—ее допустимым значением.

Замечания. а) Иногда соотношения между элементами рассматриваемого изображения заданной условием задачи фигуры недостаточно заметны и на их существование может указывать (*не всегда*!) формула решения задачи в общем виде; доказательство существования подмеченных таким образом соотношений опять выполняется по изображению заданной фигуры. Так, если бы в настоящей задаче по изображению призмы было установлено только, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то формула решения подсказывала бы, что еще должно быть соотношение $\beta > \alpha$; наличие такого соотношения и требовалось бы дополнительно доказать.

б) Так как в предлагаемых задачах длины отрезков, площади и объемы суть положительные числа, то в ответах приводятся лишь соотношения (доказанные!) между соответствующими параметрами этих величин (см. задачу 632), ограничиваясь записью допустимых систем значений угловых параметров. **601.** $\frac{\sqrt{3}\, a^3 \operatorname{tg} \varphi}{4}$; $\frac{\sqrt{3}\, a^2}{4 \cos \varphi}$.

602. $4l^2 \sin \alpha \cos \beta (\cos \alpha + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta})$. **603.** $\arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$; через вершину тупого угла. **606.** $\frac{q}{\cos \alpha}$.

607. $\sqrt{128 R^2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$.

608. $\frac{\sqrt{12 r^2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

609. $2l^2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. 611. $\frac{\sqrt{Q^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{18}}$.

612. $\frac{4}{3}\sqrt{q^3}\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 613. $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$. 614. $2\arcsin\left(\cos\alpha \sin\frac{\pi}{n}\right)$.

615. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi}{2}$. 616. $\operatorname{arcctg}(\sqrt{3}\sin\beta)$; интервал $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$, $\approx 80°16'$.

617. $2\operatorname{arc\,ctg}(\sin y)$, где $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$, или $2\operatorname{arc\,ctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, или $\arccos(-\cos^2\alpha)$. *Указание.* Данная задача решается методом введения вспомогательного угла, заключающегося в следующем. Угол между двумя смежными боковыми гранями проще определить через угол наклона бокового ребра пирамиды к ее основанию ($\angle NAO$ на чертеже), который как вспомогательное неизвестное обозначим через y, а искомый двугранный угол — через x. Тогда получим: $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{OK}{OB}$, $\sin y = \frac{OK}{OA}$, $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \sin y$, $x = 2\operatorname{arc\,ctg}(\sin y)$. Далее будем иметь: $\operatorname{tg} y = \frac{NO}{AO}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{NO}{OM}$, $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{OM}{OA} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$. Окончательно будет: $x = 2\operatorname{arc\,ctg}(\sin y)$, где $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$. Таким образом, сначала искомый угол был определен через вспомогательный неизвестный угол и уже затем этот последний определен через данный угол.

При вычислениях сначала находится вспомогательный угол, затем найденное его значение подставляется в формулу, определяющую основное неизвестное, для вычисления последнего.

Нередко в практике ставится вопрос, всегда ли такой порядок вычислений является наиболее рациональным и предпочтительным такому порядку, когда путем подстановки основное неизвестное непосредственно определяется через данный угол?

Такая подстановка с последующими преобразованиями в данной задаче будет выглядеть так:

$$2\operatorname{arc\,ctg}(\sin y) = 2\operatorname{arc\,ctg}\left[\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right] = 2\operatorname{arc\,ctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \ldots = \arccos(-\cos^2\alpha).$$

Как видно, в данной задаче выражение основного неизвестного через известный угол упрощает вычисления. 618. $\frac{3}{2}a^2 \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, где

$x = 2\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}}$, или $\dfrac{\sqrt{27}\,a^2}{4\sqrt{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)}}$;

$\dfrac{2\pi}{3} < \varphi < \pi$. *Указание.* Для упрощения решения задачи опять выгодно ввести вспомогательный угол; за такой угол в данной задаче целесообразно принять плоский угол при вершине пирамиды, тогда боковая поверхность ($S_б$) пирамиды выразится так: $S_б = \dfrac{3}{2}\,a^2 \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$. Далее, будем иметь (см. чертеж 43): $\sin\left(90^\circ - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{AK}{AB}$; $\sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{AM}{AK}$; $\cos\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x = 2\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}}$,

что и дает первый приведенный ответ. Далее, получаем:

$\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}}$, $\sin\dfrac{x}{2} = \ldots = \dfrac{\sqrt{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$;

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)}};$$

$S = \dfrac{\sqrt{27}\,a^2}{4\sqrt{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)}}$. **619.** $\dfrac{a^3\operatorname{tg} x}{12}$, где $x = \arcsin\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}}$, или $\dfrac{a^3\cos\dfrac{\varphi}{2}}{24\sqrt{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}}$.

620. φ; $\operatorname{arc\,ctg}(\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\varphi)$. **621.** $\dfrac{2}{3}\,a^3\sin^2\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$; $\arcsin(\operatorname{tg}\varphi)$; $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$. **622.** $\dfrac{\sqrt{8}\,a^2\sin\alpha\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\left(\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\beta}$. **623.** $\dfrac{S(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$;

$\sqrt{\dfrac{S^3\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}}{n}}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{3}$. **624.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}\sin 2\alpha}{4\sin 3\alpha}$; $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$.

625. $-2a^2\cos\alpha\operatorname{ctg}2\alpha$, где $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 626. $\frac{k^2\sqrt{12\,(1+3\sin^2\varphi)}}{\sin\varphi\cdot\sin 2\varphi}$.

627. $\frac{a^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}{12\sin\alpha}$. 629. $\frac{a^3\operatorname{tg}x}{48\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, где $x=\arccos\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}$, или

$\frac{a^3\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}}{48\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$; $0<\frac{\beta}{2}<\alpha$ и $\frac{\beta}{2}+\alpha<\pi$.

631. $\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha}{4\cos\varphi}$; $\frac{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha\cdot\cos\varphi}$; $\frac{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\alpha\cdot\cos\varphi}$ (см. задачу 583).

632. $\frac{(a+b)^2\sqrt{a(a-2b)}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{24}$; $0<2b<a$.

633. $\frac{2d^3\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{3\sin\alpha\sin 2\alpha}$; $\frac{2d^3\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{3\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}$;

$\frac{2d^3\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{3\sin\alpha\sin 2\alpha}$. 634. $\frac{c^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^2 x}$, где $x=\arccos\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$, или

$\frac{3c^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}$; $0<\alpha<\frac{2\pi}{3}$.

637. $\frac{\sqrt{3}\left(a^2+b^2\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}\right)\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\alpha}$;

$\frac{(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha}{24}$. 638. $\frac{d^3(1+\cos^3 2\varphi)}{6\sin\varphi\cdot\sin 2\varphi}$; $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. 639. $a^2\operatorname{tg}\alpha$.

640. $\frac{na^3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}\cdot\sin(\alpha-\beta)}{24\cos\alpha\cdot\cos\beta}$. 641. $\frac{a^2\operatorname{ctg}\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{8}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}$; $\frac{a^3\operatorname{ctg}^2\alpha}{16\sin\alpha}$.

642. $\frac{m^2\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta\cdot\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$. 643. $\frac{a^3\sin 2\beta\cos\beta\cdot\sin^3\alpha\sin\frac{\pi}{4}}{\sin^3(\alpha+\beta)}$.

644. $\frac{(a^2-b^2)\,b\,\operatorname{tg}\alpha}{4}$; $\frac{(a-b)^2(a+2b)\operatorname{tg}\alpha}{12}$. 645. $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{8}}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$.

646. $\frac{5ab^2}{24}\cdot\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$. 647. $\frac{a\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{n}}$,

где $0<\alpha<\frac{2\pi}{n}$. 648. $\operatorname{arc\,tg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. 649. $4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

650. $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2\sin\alpha}$. 651. $\frac{a}{2}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. 652. $\frac{\sqrt{5}\,\pi Q\sin(\alpha+\operatorname{arc\,ctg}2)}{2\sin\alpha}$;

$\frac{\pi}{4}\sqrt{Q^3\operatorname{ctg}\alpha}$. 653. $\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}\,d^2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\operatorname{arc\,ctg}2\pi\right)$;

$\frac{d^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{8\pi}$. 654. $\frac{h^2}{2\cos^2\alpha}$; 1), 3) нельзя. 655. $\frac{a^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4\sin\beta}$.

656. $2\pi\sin\frac{\alpha}{2}$. 657. $\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\pi}$. 658. $\operatorname{arc\,sin}(\cos\alpha\cdot\sin\varphi)$. 659. $\pi l^2\cos\alpha\times$

$\times(1+\cos\alpha)$; $\frac{\pi l^3\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{6}$. В целях упрощения вычислений в данной задаче формулу полной поверхности необязательно приводить к логарифмическому виду. 662. $\frac{\pi m^2\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$; $\frac{\pi m^3\sin\alpha\sin 2\alpha}{\sqrt{288}\sin^3\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$.

663. $\frac{\pi d^3\cos^2\alpha\cos^2\beta}{3\sin^2(\alpha-\beta)}$. 664. $\frac{\sqrt{2S^3\alpha(4\pi^2-\alpha^2)}}{12\pi^2}$. 665. $\sqrt[3]{\frac{3v}{\pi\operatorname{tg}x}}$,

где $x=\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{3}}$, или $\sqrt[3]{\frac{3v}{\sqrt{2}\pi}}$. *Указание.* Обозначив угол наклона образующей конуса к плоскости его основания через x, получим: $r=\sqrt[3]{\frac{3v}{\pi\operatorname{tg}x}}$, $S=\sqrt{\frac{9\pi v^2}{\cos x\sin^2 x}}$, где r — радиус основания конуса и S — боковая поверхность конуса. Очевидно, что $S_{\min}$ будет в том случае, когда переменный знаменатель подкоренного выражения будет иметь наибольшее значение, для которого соответствующее значение x и находится при помощи производной: $(\sin x\cdot\cos^2 x)'=\ldots=$ $=\sin x(3\cos^2 x-1)$, откуда при $0<x<\frac{\pi}{2}$ получаем: $\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

установив далее, что при $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ выражение $\sin x \cdot \cos^2 x$ принимает наибольшее значение, имеем: $x = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. **666.** $\frac{\pi l^3 k}{3\sqrt{(1+k^2)^5}}$.

668. $\frac{\pi (R^2 - r^2) \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. **669.** $2\pi l^2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$;

$\frac{\pi l^3}{12} \sin \alpha (2 - \cos 2\alpha)$. **670.** $\frac{\pi h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi}$, где $\varphi = \operatorname{arc\,ctg} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{5}$;

$\frac{19 \pi h^3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{75}$. **671.** $\frac{\sqrt{5}}{2} \pi d^2 \cos \alpha \cdot \sin (\alpha + \operatorname{arc\,ctg} 2)$; $\frac{\pi d^3}{8} \sin 2\alpha \cos \alpha$.

672. $\frac{l \sin 2\alpha}{\sqrt{8} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$. **673.** $\frac{\sqrt{3}\, l \sin 2\alpha}{4 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}$. **674.** $\frac{2\pi d^2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin 2\alpha}$.

675. $\frac{2 l^3 \sin^2 \beta \operatorname{ctg} \alpha}{3 \sin \alpha} \sqrt{\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)}$, где $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

676. $\operatorname{arc\,ctg}\, 0{,}5$. **677.** $\frac{\pi}{3} (R^3 - r^3) \operatorname{ctg} \alpha$. **678.** $h = \frac{H}{3}$, где h—высота цилиндра, H — высота конуса. *Указание.* Обозначив угол между образующей конуса и плоскостью основания через α (известен: конус дан) получим для объема цилиндра выражение: $\pi (H-h)^2 h \operatorname{ctg}^2 \alpha$; далее, из этого выражения следует выделить переменный множитель $(H-h)^2 \cdot h$ и исследовать его на maximum при помощи производной

680. $\frac{R}{\sin \alpha} (1 \mp \sin \alpha)$. **681.** $\pi R^2 \sin^2 \alpha$; $2R\alpha$, где α—радианная мера угла. **683.** $\frac{\pi a^2}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + 1\right)$; $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$. **685.** $\frac{\pi a^2 (4 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}$.

686. $8 R^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)}$, где $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

690. $\frac{2}{3} R^3 \sin^3 2\gamma \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin (\alpha + \beta)$. **691.** $-\frac{b^2 \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\cos 3\alpha}$;

1) да, 2) нет. **692.** $\frac{16 R^2}{\sin^2 \alpha}$. **693.** $\frac{4R^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi}{3 \sin \alpha}$. **694.** $\frac{\sqrt{27}\, r^2}{\sin^2 \varphi \cos \varphi}$, где

$\varphi = \arccos \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$, или $\frac{27 r^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)}$, где $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

695. $\frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}$. 696. Равносторонний.

697. $\frac{S \cdot \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. 700. $\frac{4 \pi R^3 \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{3 \cos \alpha}$.

701. $\frac{2\pi R^3 (4 - \sin^2 \alpha)}{3 \sin^2 \alpha}$; $\frac{4\pi R^2}{\sin^2 \alpha}$. 702. $2\pi r^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{4}$.

703. $\arccos \frac{23}{25}$. 705. $\frac{2 \pi r^3 \operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{3 \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}$.

706. $\frac{4 \pi R^3 \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{3 \sin \alpha}$. 707. $n_{\min} = 2$.

708. $\frac{\sqrt{5}\, \pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \operatorname{arc\,ctg} 2\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2}{3} \pi a^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

709. $8 \pi S \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right)$; $\frac{\pi}{3} \sqrt{8 S^3 \cdot \sin \alpha}$.

710. $\frac{2 \pi a^3 \sin^2 \gamma \cdot \sin(\beta + \gamma)}{3 \sin \beta}$. 711. $8 \pi a^2 \cos^3 18^\circ = 5 \pi a^2 \operatorname{tg} 54^\circ$.

713. $\frac{2 \pi d^2 \cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. *Указание.* При решении задач на тела вращения формулу решения, записанную в отрезках по чертежу, следует приводить к простейшему виду прежде, чем подставлять значения отрезков, выраженные через данные задачи. Применительно к данной задаче (см. чертеж) порядок решения будет такой: $S = \pi \cdot KB \cdot AB + \pi (KB + AC) BC + \pi (AC + MD) CD + \pi \cdot MD \cdot AD = \pi \cdot AB (KB + AC + MD) + \pi BC (KC + AC + MD) = \pi (KC + AC + MD) (AB + BC)$.

Из трапеции $ABDM$ имеем: $AB = \frac{AC}{2} = \frac{KB + MD}{2}$, следовательно, $KB + MD = AC$ и $S = 2\pi AC\,(AB + BC) = 2\pi d\,(AB + BC)$.

714. $\frac{2\pi d^3}{\sin(\alpha+\beta)}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2$. 715. $\frac{\pi R^3}{3}\sin\alpha\,\operatorname{tg}\alpha\,(1+\cos\alpha)$.

716. $2(a+b)\,c\sin\alpha$; $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$; $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$. 717. $\frac{a^3}{3}\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\varphi$; $\frac{a^2\sin\alpha}{\sin\varphi}(\cos\alpha+\cos\varphi)$. 718. $\frac{a^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos 45^\circ\right)$.

719. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{108}\operatorname{tg}x$, где $x=\operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cdot\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$;

или $\frac{\sqrt{3}\,\pi a^3\cos\frac{\alpha}{2}}{216\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$.

720. $\sqrt{S^3\left(\frac{1}{\pi}\right)^3\operatorname{ctg}\alpha}\,\frac{\sin\varphi}{6}$. 721. $\sqrt{R^2\sin^2\alpha+d^2\cos^2\alpha}$.

722. $\frac{(R^2-r^2)\operatorname{tg}\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin^2\alpha\cdot\cos\beta}$; $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

723. $\frac{\pi H^3\cos^4\alpha}{6}$. 724. $\frac{2a^2}{(1+\sqrt{2\operatorname{ctg}\varphi})^2}$. 725. 365,5.

727. $\frac{2}{3}a^3\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi$, где $\varphi=\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$,

или $\frac{2a^3\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{3\sin^2\frac{\beta}{2}}$.

728. $\frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\gamma+\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\varphi}$. 729. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

730. $\frac{\sqrt{8}\,d^2\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$. 731. $\frac{d^3\sin\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}}{3\sin^2\beta\cdot\sin^2(\alpha+\beta)}$;

$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. **732.** $2 \arccos \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. **733.** $\frac{32 R^3 \sin^5 \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta}{3 \sin \beta} \times$

$\times \sqrt{\sin (\alpha + \beta) \sin (\beta - \alpha)}$; $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. **734.** $\frac{R}{2} \sqrt[3]{\frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{4}}}$.

735. $\frac{4}{3} r^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{-\cos \alpha}$. **736.** $h = \frac{1}{3} R$, где h—высота конуса и R — радиус данного шара. **737.** Одно решение: $2a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$; два решения (второе решение $2a^2 \sqrt{-\cos \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$), если $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. **738.** $\arccos (\sin \alpha \times$ $\times \sin \beta)$. **739.** $\frac{P^2 \sin \alpha}{16 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos \varphi}$. **740.** 54°44′. **741.** $\frac{2}{3} a^3 \sin^3 \alpha \times$ $\times \sin 3\alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi$; $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ и $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, или $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

742. $\frac{a^2 \left(1 + \sin \frac{\beta}{2}\right)}{2 (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 \sin \frac{\beta}{2}}$. **743.** $\operatorname{arc ctg} \sqrt{2}$. **744.** $\frac{8R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$.

745. $\frac{a \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$; $\frac{a}{2 + \operatorname{tg} \alpha}$.

746. $\frac{\sqrt{12} \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \operatorname{ctg}^4 \frac{\varphi}{2}}{9\pi \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$.

747. $\frac{ab^2 \cdot \sin \alpha}{2 \cos \beta} \sqrt{\sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\beta - \alpha)}$; $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

748. $\frac{R (1 + \sin^2 \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{3 + \sin^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha}$. **749.** $h = 4r$, где h — высота конуса и r — радиус шара. **750.** $\frac{abc}{ab + ac + bc}$.